בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית, פרופ' ג'רמי שיף, 88-902-02

מבחן מועד ב', סמסטר ב' תשע"א - פתרונות

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. שאלה 5 היא חובה. ניקוד כל השאלות שווה.
יש לנמק היטב כל תשובה.

1. התהליך הסטוכסטי $X(t)$ מקיים את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dX = \alpha X dt + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 X^2} dW \ , \qquad X(0) = x$$

כאשר α, β, γ, x הם קבועים חיוביים.

(א) הוכח שהתהליך $Y = \frac{1}{2}X^2$ מקיים את המד"ס

$$dY = \left(\left(2\alpha + \gamma^2\right) Y + \frac{1}{2}\beta^2\right) dt + \sqrt{2Y(\beta^2 + 2\gamma^2 Y)} dW, \quad Y(0) = \frac{1}{2}x^2$$

(ב) כתוב את שיטת מילשטיין למד"ס ל-Y מהסעיף הקודם.

(ג) הסבר בקצרה איך ניתן להשתמש בשיטת מילשטיין עם שיטת מונטה קרלו למצוא קירוב ל- $\mathbf{E}[Y(T)]$, כאשר T הוא קבוע חיובי.

(ד) האם ניתן למצוא את $\mathbf{E}[Y(T)]$ בלי למצוא את המד"ס ל-Y ? כלומר, האם ניתן למצוא את $\mathbf{E}[Y(T)]$ על ידי שימוש רק במד"ס ל-X ?

(א) לפי הלמה של איטו, אם X מקיים $dX = adt + bdW$ אזי $Y = g(X,t)$ מקיים $dY = \left(g_t + a g_X + \frac{1}{2}b^2 g_{XX}\right) dt + b g_X dW$. לכן כאן

$$\begin{aligned} dY &= \left(\alpha X \cdot X + \frac{1}{2}\left(\beta^2 + \gamma^2 X^2\right)\right) dt + \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 X^2} \cdot X dW \\ &= \left(\alpha X^2 + \frac{1}{2}\left(\beta^2 + \gamma^2 X^2\right)\right) dt + \sqrt{X^2\left(\beta^2 + \gamma^2 X^2\right)} dW \\ &= \left(2\alpha Y + \frac{1}{2}\beta^2 + \gamma^2 Y\right) dt + \sqrt{2Y\left(\beta^2 + 2\gamma^2 Y\right)} dW \end{aligned}$$

ברור גם ש- $Y(0) = \frac{1}{2}x^2$.

(ב) שיטת מילשטיין למד"ס $dY = adt + bdW$ היא

$$Y_{i+1} = Y_i + a(Y_i, t_i)h + b(Y_i, t_i)\sqrt{h} Z_i + \frac{h}{2} b(Y_i, t_i) b_Y(Y_i, t_i)(Z_i^2 - 1)$$

כאשר $Z_i \sim N(0,1)$. כאן יש לנו ש-

$$b b_Y = \sqrt{2Y\left(\beta^2 + 2\gamma^2 Y\right)} \frac{2\beta^2 + 8\gamma^2 Y}{2\sqrt{2Y\left(\beta^2 + 2\gamma^2 Y\right)}} = \beta^2 + 4\gamma^2 Y$$

ולכן שיטת מילשטיין היא

$$Y_{i+1} = Y_i + h\left((2\alpha+\gamma^2)Y_i + \frac{1}{2}\beta^2\right) + \sqrt{2hY_i\left(\beta^2+2\gamma^2Y_i\right)}Z_i + \frac{h}{2}\left(\beta^2+4\gamma^2Y_i\right)(Z_i^2-1)$$

(ג) על ידי שיטת מילשטיין ניתן לייצר דגימות של $Y(T)$ מהערך של $Y(0)$. מחלקים את הקטע T ל- N תת-קטעים של אורך $h=\frac{T}{N}$ ומחשבים את הערך של Y בסוף התת-קטע מהערך של Y בהתחלת התת-קטע לפי הנוסחה בסוף הקודם.

הרעיון של מונטה-קרלו הוא שחוזרים על תהליך זה M פעמים, לקבל M דגימות של $Y(T)$ ואז עושים ממוצע של הדגומות לקבל אומדן של $\mathbf{E}[Y(T)]$.

(ד) ניתן לעבוד ישיר עם המשוואה ל-X. מפעילים שיטת מילשטיין או שיטת אויילר למשוואה ל-X לקבל אומדנים ל-$X(T)$ ומקבלים אומדנים ל- $Y(T)$ על ידי הנוסחה $Y(T)=\frac{1}{2}X(T)^2$.

---

2. המחיר $S(t)$ של נכס מסויים מתנהג לפי

$$dS = S(rdt + \sigma dW)$$

כאשר r,σ הם קבועים חיוביים. רוצים להשוות את המחירים ולחשב את הקורלציות של שלושה נגזרים:

(א) חוזה המשלם תגמול P אם עד לזמן T המחיר של הנכס גם עלה מעל 10% מהמחיר של היום וגם ירד מעל 10% מהמחיר של היום.

(ב) חוזה המשלם תגמול P אם ההפרש בין המחיר הגבוה והמחיר הנמוך בתקופה T הקורבה הוא גדול מ- 20% ממחיר הנכס היום.

(ג) חוזה המשלם תגמול P אם בסוף תקופת T המחיר של הנכס הוא יותר מ- 20% או מעל המחיר של היום או מתחת למחיר של היום.

(א) הסבר, בקצרה, בלי לכתוב פקודות מחשב, איך היית עושה סימולציה רלוונטית למצוא אומדנים למחירים של שלושת החוזים ומקדמי המתאם שלהם.

(ב) מהם מקורות הטעות בסימולציה? מהיא התלות של טעויות אלה על הפרמטרים הרלוונטיים בסימולציה?

(ג) מה ניתן להגיד על התלויות של התוצאות על הפרמטרים r,σ,T ?

(א) הבסיס של הסימולציה יהיה דגימה M מסלולי מחיר אפשריים לנכס בתקופת הזמן T. בכל מסלול לא ניתן לדגום את המחיר באופן רציף, אלא נסתכל על המחירים בזמנים $t=0,h,2h,\dots T$ כאשר $h=\frac{T}{N}$. ככה יש שני פרמטרים של הסימולציה: מספר המסלולים M ומספר הנקודות בתוך כל מסלול N.

אם נסמן על ידי $S_{i,j}$ מחיר בזמן ih במסלול מספר j, כאשר $0\le i\le N$, $1\le j\le M$, ייצור המחירים יהיה על ידי

$$S_{i+1,j} = S_{i,j}e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)h+\sigma\sqrt{h}Z_{i,j}}$$

כאשר $Z_{i,j}$ הוא משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.

לכל מסלול נחשב את המחיר המקסימלי

$$\text{Max}_j = \max_{0\le i\le N} S_{i,j}$$

והמחיר המינימלי

$$\text{Min}_j = \min_{0\le i\le N} S_{i,j}$$

ונייצר שלושה וקטורים, אחד לכל חוזה, עם רכיב 1 אם החוזה נותן תגמול ו-0 אחרת. כלומר

$$\begin{aligned}
(v_1)_j &= \begin{cases} 1 & \text{Max}_j > 1.1S_0 \text{ and } \text{Min}_j < 0.9S_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
(v_2)_j &= \begin{cases} 1 & \text{Max}_j - \text{Min}_j > 0.2S_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
(v_3)_j &= \begin{cases} 1 & S_{N,j} > 1.2S_0 \text{ or } S_{N,j} < 0.8S_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

כאן S_0 מסמן את המחיר ההתחלתי של הנכס.

רק נשאר לחשב את המחירים של החוזים, שהם P כפול הממוצעים של הווקטורים, ו-3 מקדמי המתאם, שהם מקדמי המתאם של כל זוג של וקטורים.

(ב) יש שני מקורות טעות: מספר סופי של דגימות, כלומר M סופי, ושימוש בזמנים בדידים בתוך כל מסלול, כלומר N סופי. אנחנו מצפים שיהיו טעויות במחירים של החוזים בגלל האפקט הראשון מסדר גודל $O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$. לא התייחסנו בקורס לסדר הגודל של הטעות בחישוב של מקדמי המתאם. האפקט השני לא ישפיע על המחיר של החוזה השלישי, אבל יגרום למחירים של שני החוזים הראשונים להיות נמוכים מדי (נפספס מקרים שעוברים את המחסומים). מצפים לטעות מסדר גודל של $O(h)$. (אבל גם פה לא כל כך ברור לי שאני יכול להצדיק את זה ממה שלמדנו בקורס, רק על סמך הנסיון עם שיטת אויילר.)

(ג) נתייחס למחירים. לשני הראשונים ברור שהעלת T רק יכול להעלות את המחיר, ואני חושב שאותו דבר נכון גם לחוזה השלישי, אבל זה פחות ברור. העלת r גורם למחיר של הנכס לעלות באופן יותר אחיד, לכן אני חושב שזה יעלה את המחירים של החוזים השני והשלישי, אבל יוריד את המחיר של החוזה הראשון (יהיה פחות סיכוי לרדת). העלת σ היא יותר תנודתיות, ולדעתי זה יעלה את המחירים של כל שלושת החוזים, שסה"כ משלמים תמורה כאשר יש שינוי חד במחירי הנכס.

לגבי תלות של מקדמי המתאם על הפרמטרים, יש לא מעט להגיד, אבל לדעתי האפקט הברור ביותר יהיה שכאשר מעלים את r החוזים יהיו יותר מותאמים - בגלל שאם המחיר של הנכס רק עולה, בכולם מקבלים תמורה אם ורק אם המחיר יעלה 20% מהתחלה עד סוף.

---

3. (א) כתוב את שיטת אויילר למערכת

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} - 3u - 2v \\
v_t &= v_{xx} + u
\end{aligned}$$

(אין צורך להתייחס לתנאי התחלה או תנאיי שפה)

(ב) על ידי חיפוש פתרון של המשוואות שמקבלים בשיטת אויילר בצורה

$$u_{i,j} = \lambda^j e^{i\sqrt{-1}\theta} \ , \qquad v_{i,j} = C\lambda^j e^{i\sqrt{-1}\theta}$$

כאשר C, λ, θ הם קבועים, הוכח שתנאי היציבות לשיטת אויילר למערכת זו היא

$$k \le \frac{h^2}{2+h^2}$$

(א)

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} &= \frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2} - 3u_{i,j} - 2v_{i,j} \\ \frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{k} &= \frac{v_{i-1,j}-2v_{i,j}+u_{i+1,j}}{h^2} + u_{i,j} \end{aligned}$$

או

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= u_{i,j} + \frac{k}{h^2}(u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}) - 3ku_{i,j} - 2kv_{i,j} \\ v_{i,j+1} &= v_{i,j} + \frac{k}{h^2}(v_{i-1,j}-2v_{i,j}+u_{i+1,j}) + ku_{i,j} \end{aligned}$$

(ב) למשוואות האלה יש פתרון

$$u_{i,j} = \lambda^j e^{i\sqrt{-1}\theta} \ , \qquad v_{i,j} = C\lambda^j e^{i\sqrt{-1}\theta}$$

אם

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 + \frac{k}{h^2}(2\cos\theta - 2) - 3k - 2Ck \\ C\lambda &= C + \frac{Ck}{h^2}(2\cos\theta - 2) + k \end{aligned}$$

יש צורך לפתור משוואות אלה למצוא את λ, C. בעצם רק צריך λ, יש יציבות במובן של וון-נוימן אם הערך הגדול ביותר של $|\lambda|$ אינו עולה על 1. מהמשוואה הראשונה:

$$-2C = \frac{\lambda-1}{k} + \frac{4}{h^2}\sin^2\theta + 3$$

המשוואה השניה ניתן לכתוב

$$\left(\frac{\lambda-1}{k} + \frac{4}{h^2}\sin^2\theta\right)C = 1$$

ולכן λ מקיים את המשוואה

$$\left(\frac{\lambda-1}{k} + \frac{4}{h^2}\sin^2\theta\right)\left(\frac{\lambda-1}{k} + \frac{4}{h^2}\sin^2\theta + 3\right) = -2$$

נכתוב

$$x=\frac{\lambda-1}{k}\qquad y=\frac{4}{h^2}\sin^2\theta$$

אזי

$$(x+y)(x+y+3)=-2\quad\Leftrightarrow\quad(x+y)^2+3(x+y)+2=0\quad\Leftrightarrow\quad(x+y+2)(x+y+1)=0$$

מזה נובע ש- $x=-1-y$ **או** $x=-2-y$, **כלומר**

$$\lambda=1-k\left(1+\frac{4}{h^2}\sin^2\theta\right)\quad\text{or}\quad 1-k\left(2+\frac{4}{h^2}\sin^2\theta\right)$$

ברור ש- $\lambda<1$, **יש רק צורך לבדוק ש-** $-1\le\lambda$. **זה דורש**

$$k\left(2+\frac{4}{h^2}\right)\le 2\quad\Leftrightarrow\quad k\le\frac{1}{1+\frac{2}{h^2}}=\frac{h^2}{2+h^2}$$

---

4. רוצים לפתור את הבעייה

$$\begin{gathered}u_t=u_{xx}\qquad a(t)<x<b(t),\ t>0\\ u(x,0)=f(x)\\ u(a(t),t)=\alpha\ ,\quad u(b(t),t)=\beta\end{gathered}$$

כאן $a(t),b(t)$ ו- $f(x)$ הן פונקציות נתונות, ו- α,β הם קבועים נתונים.

(א) הוכח שעל ידי ההצבה

$$\begin{cases}x&=&a(s)+[b(s)-a(s)]y\\ t&=&s\end{cases}$$

ניתן לכתוב את הבעיה בצורה

$$\begin{gathered}u_s=p(s)u_{yy}+[q(s)y+r(s)]u_y\qquad 0<y<1,\ s>0\\ u(y,0)=f\left(a(0)+[b(0)-a(0)]y\right)\\ u(0,s)=\alpha\ ,\quad u(1,s)=\beta\end{gathered}$$

כאשר $p(s),q(s),r(s)$ הן פונקציות שיש למצוא.

(ב) כתוב את שיטת Crank-Nicolson לבעיה בסעיף הקודם. יש להתייחס באופן מלא לתנאיי השפה.

(א) על ידי כלל השרשרת

$$\begin{aligned}\partial_y&=&\frac{\partial x}{\partial y}\partial_x+\frac{\partial t}{\partial y}\partial_t=(b(s)-a(s))\partial_x\\ \partial_s&=&\frac{\partial x}{\partial s}\partial_x+\frac{\partial t}{\partial s}\partial_t=(a'(s)+(b'(s)-a'(s))y)\partial_x+\partial_t=\partial_t+\left(\frac{a'(s)}{b(s)-a(s)}+y\frac{b'(s)-a'(s)}{b(s)-a(s)}\right)\partial_y\end{aligned}$$

ולכן בקואורדינטות החדשות יש לנו

$$u_s-\left(\frac{a'(s)}{b(s)-a(s)}+y\frac{b'(s)-a'(s)}{b(s)-a(s)}\right)u_y=\frac{1}{(b(s)-a(s))^2}u_{yy} \qquad 0<y<1\ ,\ s>0$$
$$u(y,0)=f\left(a(0)+[b(0)-a(0)]y\right)$$
$$u(0,s)=\alpha\ ,\quad u(1,s)=\beta$$

כלומר

$$p(s)=\frac{1}{(b(s)-a(s))^2}\ ,\qquad q(s)=\frac{b'(s)-a'(s)}{b(s)-a(s)}\qquad r(s)=\frac{a'(s)}{b(s)-a(s)}$$

(ב) שיטת אוילר היא

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}=p_j\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+(ihq_j+r_j)\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}$$

כאן

$$p_j=p(jk)\ ,\quad q_j=q(jk)\ ,\quad r_j=r(jk)$$

האינדקס i רץ מ- 1 עד $N-1$, כאשר $h=\frac{1}{N}$ ותנאיי השפה הם $u_{0,j}=\alpha$, $u_{N,j}=\beta$ לכל $j>0$. שיטת קרנק ניקולסון היא

$$\begin{aligned}\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} &= \frac{1}{2}\Big(p_j\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+(ihq_j+r_j)\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}\\ &\quad+p_{j+1}\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}+(ihq_{j+1}+r_{j+1})\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}}{2h}\Big)\end{aligned}$$

ניתן לכתוב את זה בצורה

$$A_ju_{i+1,j+1}+B_ju_{i,j+1}+C_ju_{i-1,j+1}=D_ju_{i+1,j}+E_ju_{i,j}+F_ju_{i-1,j}$$

כאשר

$$A_j=-\frac{kp_{j+1}}{2h^2}-\frac{k(ihq_{j+1}+r_{j+1})}{4h}\qquad B_j=1+\frac{kp_{j+1}}{h^2}\qquad C_j=-\frac{kp_{j+1}}{2h^2}+\frac{k(ihq_{j+1}+r_{j+1})}{4h}$$

$$D_j=\frac{kp_j}{2h^2}+\frac{k(ihq_j+r_j)}{4h}\qquad E_j=1-\frac{kp_j}{h^2}\qquad F_j=\frac{kp_j}{2h^2}-\frac{k(ihq_j+r_j)}{4h}$$

---

5. <u>יש לענות או על סעיף (א) או על סעיף (ב)</u>

(א) (המשך של שאלה מס' 1.) כתוב קוד מטלב לחשב את $\mathbf{E}[Y(T)]$ במקרה ש- β הוא קטן, על ידי שימוש בפתרון המדוייק

$$\mathbf{E}[Y(T)]=\frac{1}{2}x^2e^{\left(2\alpha+\gamma^2\right)T}$$

המתקבל במקרה $\beta=0$ כמשתנה בקרה. אין צורך להצדיק נוסחה זו ל- $\mathbf{E}[Y(T)]$ במקרה $\beta=0$, אבל יש להתייחס בקצרה לטיב הקורלציה בין המשתנה המקורי ומשתנה הבקרה, ולתלותו על הפרמטרים בבעיה.

(ב) (המשך של שאלה מס' 3.) כתוב קוד מטלב להפעיל את שיטת אויילר למערכת המש-וואות בסעיף (א). יש לקחת את המשתנה x בקטע $[0,1]$ ולהתייחס לתנאיי שפה

$$u(0,t)=0\ ,\quad u(1,t)=1\ ,\quad v_x(0,t)=-1\ ,\quad v(1,t)=0$$

ותנאיי התחלה

$$u(x,0)=x\ ,\quad v(x,0)=1-x$$

המטרה היא לחשב את $u(x,t)$ ואת $v(x,t)$ בזמנים $t=0.5,1,2$ ולצייר גרפים של הפתרונות בזמנים אלה.

(א) הנה תוכנה פשוטה לעשות את זה ללא משתנה בקרה:

```
% find E[ 1/2 X(T)^2 ] where X satisfies
% dX = alpha X dt + sqrt( beta^2 + gamma^2 X^2) dW   X(0)=x
% alpha, beta, gamma, x, T positive constants
% I am going to use the Euler method for X, why should I work hard


% choice of parameters - of the problem and of the numerics
x=5;
alpha=0.2;
beta=0.2;
gamma=0.3;
T=1;
M=10000;
N=100;
h=T/N;


% Euler method
X=zeros(M,N+1);
Z=randn(M,N);
X(:,1)=x*ones(M,1);
for i=1:N
   X(:,i+1)=X(:,i) + h*alpha*X(:,i) + Z(:,i).*sqrt( h*(beta^2+gamma^2*X(:,i).^2));
end


% results
v1=mean(X(:,N+1).^2/2);                    % what we are looking for
v2=std(X(:,N+1).^2/2)/sqrt(M);             % Monte Carlo error estimate
[v1 v2]
```

והנה תוכנה לעשות את זה עם משתנה בקרה

```
% find E[ 1/2 X(T)^2 ] where X satisfies
% dX = alpha X dt + sqrt( beta^2 + gamma^2 X^2) dW   X(0)=x
% alpha, beta, gamma, x, T positive constants
% for case beta=0 have an exact formula
% E[1/2 X(T)^2] = 1/2 x^2 exp( (2alpha-gamma^2) T )
% want to use this as a control variable, assuming beta small
% I am going to use the Euler method for X, why should I work hard

% parameters of the problem
x=5;
alpha=0.2;
beta=0.2;
gamma=0.3;
T=1;

% small run to get correlation with beta=0
M=1000;
N=100;
h=T/N;

% Euler method
X=zeros(M,N+1);
X0=zeros(M,N+1);
Z=randn(M,N);
X(:,1)=x*ones(M,1);          % simulation with desired beta
X0(:,1)=x*ones(M,1);         % simulation with beta=0
for i=1:N
   X(:,i+1)=X(:,i) + h*alpha*X(:,i) + Z(:,i).*sqrt( h*(beta^2+gamma^2*X(:,i).^2));
   X0(:,i+1)=(1 + h*alpha + sqrt(h)*gamma*Z(:,i)).*X0(:,i);
end

q = cov( X(:,N+1).^2/2 , X0(:,N+1).^2/2 );
c = -q(1,2)/q(2,2);

% bigger run using control variable
M=10000;
N=100;
h=T/N;
```

```
% Euler method
X=zeros(M,N+1);
X0=zeros(M,N+1);
Z=randn(M,N);
X(:,1)=x*ones(M,1);         % simulation with desired beta
X0(:,1)=x*ones(M,1);        % simulation with beta=0
for i=1:N
   X(:,i+1)=X(:,i) + h*alpha*X(:,i) + Z(:,i).*sqrt( h*(beta^2+gamma^2*X(:,i).^2));
   X0(:,i+1)=(1 + h*alpha + sqrt(h)*gamma*Z(:,i)).*X0(:,i);
end

Y = X(:,N+1).^2/2 +  c * ( X0(:,N+1).^2/2 - x^2/2*exp((2*alpha+gamma^2)*T) );

% results without control variable
v1=mean(X(:,N+1).^2/2);                    % what we are looking for
v2=std(X(:,N+1).^2/2)/sqrt(M);             % Monte Carlo error estimate
[v1 v2]

% results with control variable
w1=mean(Y);                                % what we are looking for
w2=std(Y)/sqrt(M);                         % Monte Carlo error estimate
[w1 w2]
```

הנה קצת תוצאות של 3 הרצות של התוכנה הזאת:

answer from raw data	s.d.	answer with c.v.	s.d.
20.358	0.135	20.429774	0.000086
20.424	0.138	20.429850	0.000089
20.231	0.134	20.429814	0.000087

השונות ירדה באופן משמעותי.

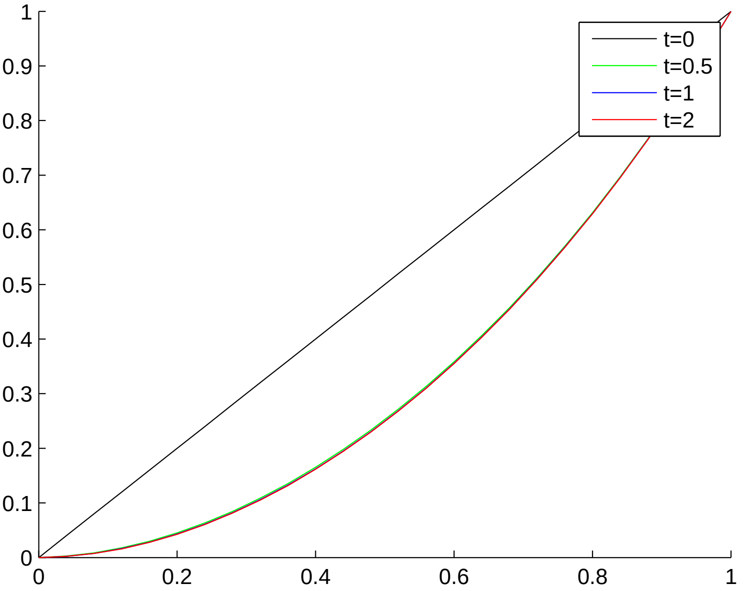
(ב) הנה התוכנה שאני כתבתי

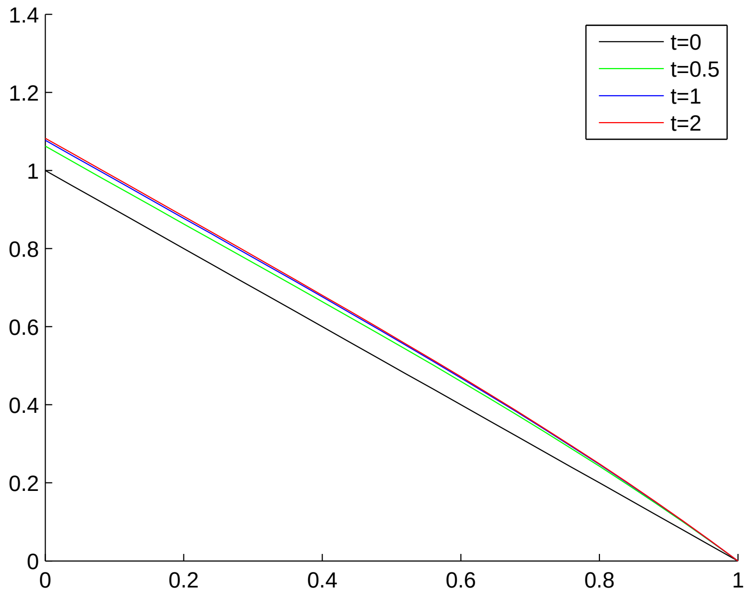
```
% solve the system  u_t = u_{xx} - 3 u - 2 v
%                   v_t = v_{xx} + u
% x in [0,1], t>0
% initial condition u(x,0)=x, v(x,0)=1-x
% boundary conditions u(0,t)=0, u(1,t)=1
%                     v_x(0,t)=-1, v(1,t)=0
% want to compute the functions at times t=0.5,1,2
```

```
N=25;                 % number of steps in x direction
M=3000;               % number of steps (till t=2) in t-direction
                      % chosen to respect the stability condition!!
h=1/N;
k=2/M;
u=zeros(M+1,N+1);   % note j will be the row index
v=zeros(M+1,N+1);


% initial conditions
x=(0:N)/N;
u(1,:)=x;             % u(x,0)=x
v(1,:)=1-x;           % v(x,0)=1-x


% the Dirichlet boundary conditions
u(:,1)=zeros(M+1,1);   % u(0,t)=0  not really necessary to write
u(:,N+1)=ones(M+1,1);  % u(1,t)=0
v(:,N+1)=zeros(M+1,1); % v(1,t)=0  not really necessary to write
% no Dirichlet condition for v(:,1) - need to use the Neumann condition


% the Euler procedure
for j=1:M
  for i=2:N
    u(j+1,i) = u(j,i) + k/h^2*(u(j,i+1)-2*u(j,i)+u(j,i-1)) - 3*k*u(j,i) - 2*k*v(j,i) ;
    v(j+1,i) = v(j,i) + k/h^2*(v(j,i+1)-2*v(j,i)+v(j,i-1)) + k*u(j,i) ;
  end
  % use the Neumann condition .... v_x(0) \approx (4 v(h) - v(2h) - 3v(0))/(2h)
  v(j+1,1) = (2*h + 4*v(j+1,2) - v(j+1,3))/3;
end


figure(1)   % plot the function u at t=0,0.5,1,2
hold on
plot(x,u(1,:),'k')
plot(x,u(M/4+1,:),'g')
plot(x,u(M/2+1,:),'b')
plot(x,u(M+1,:),'r')
legend('t=0','t=0.5','t=1','t=2')
```

```
figure(2)  % plot the function v at t=0,0.5,1,2
hold on
plot(x,v(1,:),'k')
plot(x,v(M/4+1,:),'g')
plot(x,v(M/2+1,:),'b')
plot(x,v(M+1,:),'r')
legend('t=0','t=0.5','t=1','t=2')
```

בפועל שתי הפונקציות u, v שואפות מהר לגבולות, כמו שניתן לראות משני הגרפים שמתקבלים:





t=0
t=0.5
t=1
t=2
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1