בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית, פרופ' ג'רמי שיף, 88-636

מבחן מועד א', סמסטר א' תשע"ב

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. שאלה 5 היא חובה. ניקוד כל השאלות שווה.
יש לנמק היטב כל תשובה.

1. המשתנים הסטוכסטיים S, V מקיימים את המשוואות הדפרנציאליות הסטוכסטיות

$$\begin{aligned} dS &= S(rdt + \sqrt{V}dW_1) \\ dV &= a(V_0 - V)dt + b\sqrt{V}(\rho\, dW_1 + \sqrt{1-\rho^2}dW_2) \end{aligned}$$

כאשר r, a, V_0, b, ρ הם קבועים חיוביים עם $\rho < 1$ ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים.

(א) כתוב את שיטת אויילר-מרוימה למשוואות אלה.

(ב) איך ניתן להשתמש בשיטת מילשטיין לשפר את הקירוב למשוואה השנייה ?

(ג) הסבר למה במקרה $a = b = 0$ המשוואה הראשונה הופכת למשוואת GBM הסט-נדרטית. איך היית מציע לנצל עובדה זו לשפר את הקירוב למשוואה הראשונה ? (גם במקרה ש- a, b אינם אפס.)

2. המחירים של שתי מניות $S_1(t), S_2(t)$ מקיימים את המשוואות

$$\begin{aligned} dS_1 &= S_1(r_1dt + \sigma_{11}dW_1 + \sigma_{12}dW_2) \\ dS_2 &= S_2(r_2dt + \sigma_{21}dW_1 + \sigma_{22}dW_2) \end{aligned}$$

כאשר $r_1, r_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ הם קבועים חיוביים, עם $r_1 > r_2$, ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים. רוצים לתמחר 2 אופציות על מניות אלה. הראשונה תשלם $|S_1(T) - S_2(T)|$ בעת הפקיעה T. השנייה תשלם $\max_{0 \le t \le T}|S_1(t) - S_2(t)|$ בעת הפקיעה.

(א) הסבר בקצרה איך היית משתמש בשיטת מונטה-קרלו לתמחר את האופציה הראשונה.

(ב) הסבר בקצרה איך היית משתמש בשיטת מונטה-קרלו לתמחר את האופציה השנייה. למה, לדעתך, הקירוב לאופציה זו יהיה פחות טוב ?

(ג) אופציה שלישית מעניקה את הזכות לממש בכל זמן t מ-0 עד T, ולקבל באותו זמן $|S_1(t) - S_2(t)|$. מחזיק האופציה החליט לממש את האופציה לפני עת הפקיעה בזמן הראשון t שבו $S_2(t) > S_1(t)e^{(r_1-r_2)(T-t)}$, ואם לא קיים זמן כזה להחזיק עד עת הפקיעה. הסבר בקצרה איך היית משתמש בשיטת מונטה-קרלו למצוא את הערך של אופציה זו למחזיק זה.

3. המשתנים הסטוכסטיים S,V מקיימים את המשוואות הדפרנציאליות הסטוכסטיות

$$\begin{aligned} dS &= S(rdt+\sqrt{V}dW_1) \\ dV &= a(V_0-V)dt+b\sqrt{V}(\rho\, dW_1+\sqrt{1-\rho^2}dW_2) \end{aligned}$$

כאשר r,a,V_0,b,ρ הם קבועים חיוביים עם $\rho<1$ ו- W_1,W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים. הוכח שהתוחלת

$$u(x,y,t)=\mathbf{E}[e^{-rT}(S(T)-K)_+|S(t)=x,V(t)=y]$$

(K,T קבועים) מקיימת את המד"ח

$$u_t+rxu_x+a(V_0-y)u_y+\frac{1}{2}x^2yu_{xx}+b\rho xyu_{xy}+\frac{1}{2}b^2yu_{yy}=ru$$

איך היית מיישם את שיטת אויילר למשוואה זו ? (אין צורך להתייחס לתנאיי שפה, אבל יש להתייחס לפחות לתחום הרלוונטי של הקואורדינטות.)

4. רוצים לפתור את בעיית השפה החופשית

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}+\frac{2}{x}u_x\ , \qquad 0<x<s(t)\ ,t>0 \\ u_x(0,t) &= 0 \\ u(s(t),t) &= 0 \\ u_x(s(t),t) &= -s'(t) \\ u(x,0) &= 1-x^2\ , \quad s(0)=1 \end{aligned}$$

על ידי החלפת קואורדינטות

$$\begin{cases} x=ys(\tau) \\ t=\tau \end{cases}$$

נסח את הבעייה כבעייה על התחום הקבוע $0<y<1$, והסבר בקצרה איך ניתן לפתור את הבעייה החדשה עם שיטת אויילר.

5. יש לענות או על סעיף (א) או על סעיף (ב)

(א) (המשך של שאלה 1.) כתוב קוד מטלב לחשב את $\mathbf{E}[e^{-rT}(S-K)_+]$ (K,T קבועים). יש להניח ש a,b הם קטנים, ולהעזר גם במה שהצעת בשאלה 1, סעיף (ג), וגם בתשובה הידועה לתוחלת במקרה $a=b=0$ כמשתנה בקרה.

(ב) (קשור לשאלה 4.) כתוב קוד מטלב להפעיל את שיטת Crank-Nicolson לפתור את הבעייה

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}+\frac{2}{x}u_x\ , \qquad 0<x<1\ ,0<t<1 \\ u_x(0,t) &= 0 \\ u(1,t) &= 0 \\ u(x,0) &= 1-x^2 \end{aligned}$$

יש לתת למשתמש לבחור את מספר נקודות הרשת בכל כיוון וכיוון. ניתן להניח שניתנה פונקציה הפותרת מערכות תלת-מימדיות.

בהצלחה!