

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. שאלה 5 היא חובה. ניקוד כל השאלות שווה.

יש לנמק היטב כל תשובה.

1. המשתנה הסטוכסטי S מקיים את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dS = S \left(r dt + (a + b(S - S_0)^2) dW_1 + c dW_2 \right)$$

כאשר r, a, b, c, S_0 הם קבועים חיוביים ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים.

(א) כתוב את שיטת אויילר-מרוימה למשוואה זו.

(ב) איך היית משתמש בשיטת מונטה קרלו לחשב את $\mathbb{E}[e^{-rT}(S(T) - K)_+]$, כאשר T, K הם קבועים חיוביים? מהם מקורות הטעות בחישוב זה?

(ג) במקרה $b = 0$ המשוואה היא משוואת GBM הסטנדרטית. איך היית מנצל את זה לשפר את החישוב בסעיף הקודם, בהנחה ש- b הוא קטן?

2. המשתנים הסטוכסטיים S_1, S_2, S_3 מקיימים את המשוואות

$$dS_1 = S_1(r dt + \sigma_1 dW_1)$$

$$dS_2 = S_2(r dt + \sigma_2 dW_2)$$

$$dS_3 = S_3 \left(r dt + \sigma_3 \left(\rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2 \right) \right)$$

כאשר $r, \rho, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ הם קבועים חיוביים, עם $\rho < 1$, ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים. המשתנה הסטוכסטי X מוגדר על ידי

$$X(t) = \frac{S_3(t)}{\sigma_3 S_3(0)} - \frac{\rho S_1(t)}{\sigma_1 S_1(0)} - \frac{\sqrt{1 - \rho^2} S_2(t)}{\sigma_2 S_2(0)}$$

(א) איך ניתן לעשות דגימות של $X(t)$? (מספר חיובי נתון).

(ב) איך היית מוצא אומדנים ל- $\mathbb{E}[X(t)]$ ול- $\mathbb{E}[X(t)^2]$? איך היית מוצא אומדן ל- $\text{Var}(X(t))$?

(ג) טוענים שכאשר t הוא קטן, $\text{Var}(X(t)) \approx ct^2$ כאשר c הוא קבוע. כדי לבדוק את זה, ולמצוא את הקבוע c , רוצים לעשות אומדנים ל- $\text{Var}(X(t_1)), \text{Var}(X(t_2)), \text{Var}(X(t_3))$, כאשר $t_1 < t_2 < t_3$ הם שלושה זמנים קטנים. איך אתה מציע לעשות את זה?

3. (א) הוכח שהטעות בקירוב

$$f_{xx} \approx \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2}$$

היא $O(h^4)$.

(ב) האם השיטה

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{i,j} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{12h^2}$$

למשוואת החום $u_t = u_{xx}$ היא יציבה? (מספיק לבדוק יציבות לפי שיטת וון-נוימן).
האם יש תנאי יציבות, ואם כן מהוא?

(ג) מהם היתרונות והחסרונות של שיטה זו?

4. המחיר $S(t)$ של מניה מסויימת מקיים את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dS = S \left(rdt + (a + b(S - S_0)^2) dW_1 + c dW_2 \right)$$

כאשר r, a, b, c, S_0 הם קבועים חיוביים ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים. הוכח שהתוחלת

$$u(x, t) = \mathbf{E}[e^{-rT}(S(T) - K)_+ | S(t) = x]$$

(קבועים K, T) מקיימת את המד"ח

$$u_t + rxu_x + \frac{1}{2}x^2 \left((a + b(x - S_0)^2)^2 + c^2 \right) u_{xx} = ru$$

מהם תנאיי הסוף ותנאיי השפה הרלוונטיים למשוואה זו

(א) לאופציית put אירופאית?

(ב) לאופציית put אירופאית עם מחסום מסוג down and out?

(ג) לאופציית put אמריקאית?

5. יש לענות או על סעיף (א) או על סעיף (ב).

(א) (המשך שאלה 1.) כתוב קוד מטלב לחשב את הערך של התוחלת בסעיף (ב) כפונקציה של b ובהנחה ש- $S(0) = S_0$. יש לתת למשתמש לבחור טווח של ערכים של b ולצייר גרף של התוחלת כפונקציה של b . אין להניח ש- b הוא בהכרח קטן. שאר הפרמטרים ניתן לקבוע בתוך הקוד.

(ב) (המשך שאלה 4.) כתוב קוד מטלב למצוא את המחירים של אופציית put אירופאית על המניה. ניתן להשתמש בכל שיטה לפתור את המשוואה הרלוונטית, כמו כן ניתן או לבצע או לא לבצע החלפות קואורדינטות להביא את המשוואה לצורה נוחה יותר.

בהצלחה!