בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית, פרופ' ג'רמי שיף, 88-636

מבחן מועד ב', סמסטר א' תשע"ב

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. שאלה 5 היא חובה. ניקוד כל השאלות שווה.
יש לנמק היטב כל תשובה.

1. המשתנה הסטוכסטי S מקיים את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dS = S\left(rdt + \left(a + b(S - S_0)^2\right)dW_1 + c\,dW_2\right)$$

כאשר r, a, b, c, S_0 הם קבועים חיוביים ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים.

(א) כתוב את שיטת אויילר-מרוימה למשוואה זו.

(ב) איך היית משתמש בשיטת מונטה קרלו לחשב את $\mathbf{E}[e^{-rT}(S(T)-K)_+]$, כאשר T, K הם קבועים חיוביים ? מהם מקורות הטעות בחישוב זה ?

(ג) במקרה $b = 0$ המשוואה היא משוואת GBM הסטנדרטית. איך היית מנצל את זה לשפר את החישוב בסעיף הקודם, בהנחה ש- b הוא קטן ?

(א) זהירות: יש פרמטר S_0 במשוואה שאינו בהכרח שווה לערך ההתחלתי של S, $S(0)$. אבל אניח שכן.

בשיטת אוילר מרוימה בונים קירובים $S_0, S_1, S_2, \ldots$ לערכים המדוייקים $S(0), S(h), S(2h), \ldots$ על ידי הרקורסיה

$$S_{n+1} = S_n\left(1 + rh + \left(a + b(S_n - S_0)^2\right)\sqrt{h}Z_{1,n} + c\sqrt{h}Z_{2,n}\right) \quad , i = 0, 1, 2, \ldots$$

כאן $Z_{1,n}, Z_{2,n}$ הם משתנים מקריים נורמליים סטנרטיים בלתי תלויים.

(ב) בוחרים $h = \frac{T}{N}$ כאשר N הוא שלם לא גדול מדי, ומשתמשים בשיטת אווילר-מרוימה לעשות סימולציות של $S(T)$ מספר גדול M של פעמים. לפי הכללים של שיטת מונטה קרלו: הממוצע של הדגימות הוא אומדן לתוחלת, שיש בו טעות מסדר גודל של $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$ כאשר σ זה סטיית התקן הנמדדת של הדגימות.

מקורות טעות: h סופי גרום לטעות דטרמינסטית מסדר גודל של $\frac{1}{h}$, M סופי גורם לטעות סטוכסטית מסדר גודל של $\frac{1}{\sqrt{M}}$.

(ג) כאשר $b = 0$ יש לנו

$$dS = S(rdt + adW_1 + cdW_2) = S(rdt + \sigma dW)$$

כאשר W הוא תהליך וינר עם ו- $\sigma = \sqrt{a^2 + c^2}$. לאופציה מבוססת על מניה זו יש נוסאות בלק-שולס למחיר האופציה. כאשר b הוא קטן ניתן להשתמש במחיר האופציה כמשתנה בקרה. כלומר אם האופציה היא X והאופציה עם $b = 0$ הוא X_0 מסתכלים על

$$X_c = X + c(X - X_0)$$

כאשר

$$c = -\frac{\mathrm{cov}(X, X_0)}{\mathrm{Var}(X_0)}$$

עוד הצעה של אחד הסטודנטים למקרה b קטן. להשתמש בנוסחה

$$S_{n+1} = S_n \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) h + (a + b(S_n - S_0)^2)\sqrt{h} Z_{1,n} + c\sqrt{h} Z_{2,n}\right)$$

במקום אויילר-מרוימה. כאן $\sigma^2 = (a + b(S_n - S_0)^2)^2 + c^2$.

---

2. המשתנים הסטוכסטיים S_1, S_2, S_3 מקיימים את המשוואות

$$\begin{aligned} dS_1 &= S_1(rdt + \sigma_1 dW_1) \\ dS_2 &= S_2(rdt + \sigma_2 dW_2) \\ dS_3 &= S_3\left(rdt + \sigma_3\left(\rho\, dW_1 + \sqrt{1-\rho^2} dW_2\right)\right) \end{aligned}$$

כאשר $r, \rho, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ הם קבועים חיוביים, עם $\rho < 1$, ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים. המשתנה הסטוסטי X מוגדר על ידי

$$X(t) = \frac{S_3(t)}{\sigma_3 S_3(0)} - \frac{\rho S_1(t)}{\sigma_1 S_1(0)} - \frac{\sqrt{1-\rho^2} S_2(t)}{\sigma_2 S_2(0)}$$

(א) איך ניתן לעשות דגימות של $X(t)$? (t מספר חיובי נתון).

(ב) איך היית מוצא אומדנים ל- $\mathbf{E}[X(t)]$ ול- $\mathbf{E}[X(t)^2]$? איך היית מוצא אומדן ל- $\mathrm{Var}(X(t))$?

(ג) טוענים שכאשר t הוא קטן, $\mathrm{Var}(X(t)) \approx ct^2$ כאשר c הוא קבוע. כדי לבדוק את זה, ולמצוא את הקבוע c, רוצים לעשות אומדנים ל- $\mathrm{Var}(X(t_1)), \mathrm{Var}(X(t_2)), \mathrm{Var}(X(t_3))$, כאשר $t_1 < t_2 < t_3$ הם שלושה זמנים קטנים. איך אתה מציע לעשות את זה ?

(א) עושים דגימות של $S_1(t), S_2(t), S_3(t)$ על ידי נוסחת GBM:

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_1(0) e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t + \sigma_1\sqrt{t} Z_1} \\ S_2(t) &= S_2(0) e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t + \sigma_2\sqrt{t} Z_2} \\ S_3(t) &= S_3(0) e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_3^2\right)t + \sigma_3\sqrt{t}\left(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2\right)} \end{aligned}$$

כאן Z_1, Z_2 הם משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים. מזה מקבלים דגימות של $X(t)$ - אפשר לכתוב נוסחה

$$X(t) = \frac{1}{\sigma_3} e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_3^2\right)t + \sigma_3\sqrt{t}\left(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2\right)} - \frac{1}{\sigma_1} e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t + \sigma_1\sqrt{t} Z_1} - \frac{1}{\sigma_2} e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t + \sigma_2\sqrt{t} Z_2}$$

הנקודה החשובה בשאלה זו - שאולי היא טריביאלית מדי - היא שאין לעשות דגימות "נפרדות" של $S_3(t)$ אלא יש להשתמש במשתנים המקרים Z_1, Z_2 שהוגרלו לדגימות של $S_1(t)$ ו- $S_2(t)$ בחישוב של $S_3(t)$. אחרת הערכים של $X(t)$ שיצאו יהיו חסרי משמעות.

(ב) עושים M דגימות בלתי תלוייות של $X(t)$, הממוצע של הערכים יהיה אומדן ל- $\mathbf{E}[X(t)]$ והממוצע של הריבועים של הערכים יהיה אומדן ל- $\mathbf{E}[X(t)^2]$, מחשבים אל השונות מהנוסחה

$$\mathrm{Var}(X(t)) = \mathbf{E}[X(t)^2] - \mathbf{E}[X(t)]^2$$

ניתן להעריך את סטיות התקן גם של $X(t)$ וגם של $X(t)^2$ ומזה לקבל הערכות לשגיאות באומדנים: הטעות בתוחלת של $X(t)$ היא מסדר גודל $\sigma(X(t))/\sqrt{M}$ וכו'.

(ג) הנקודה החשובה בסעיף זה היא שלא ניתן לעשות דגימות "נפרדות" ל- $X(t_1), X(t_2), X(t_3)$ כי הערך של כל אחד משפיע על השני. יש לעשות דגימות של S_1 שלושת הזמנים t_1, t_2, t_3 על ידי

$$\begin{aligned}
S_1(t_1) &= S_1(0)e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t_1+\sigma_1\sqrt{t_1}Z_1} \\
S_1(t_2) &= S_1(t_1)e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(t_2-t_1)+\sigma_1\sqrt{t_2-t_1}Z_1'} \\
S_1(t_3) &= S_1(t_2)e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)(t_3-t_2)+\sigma_1\sqrt{t_3-t_2}Z_1''}
\end{aligned}$$

עם משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים בלתי תלויים Z_1, Z_1', Z_1'' כמו כן ל- $S_2(t_1), S_2(t_2), S_2(t_3)$ עם מ"מ נורמליים סטנדרטיים בלתי תלויים Z_2, Z_2', Z_2'', ובאומדנים ל- S_3 משתמשים בצירופים של Z_1 עם Z_2, Z_1' עם Z_2' וכו'. תהליך חישוב השונויות - כמו קודם, רק צריך להקפיד לדגום בצורה הנכונה.

---

3. (א) הוכח שהטעות בקירוב

$$f_{xx} \approx \frac{-f(x+2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-f(x-2h)}{12h^2}$$

היא $O(h^4)$.

(ב) האם השיטה

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} = \frac{-u_{i+2,j}+16u_{i+1,j}-30u_{i,j}+16u_{i-1,j}-u_{i-2,j}}{12h^2}$$

למשוואת החום $u_t = u_{xx}$ היא יציבה ? (מספיק לבדוק יציבות לפי שיטת וון-נוימן). האם יש תנאי יציבות, ואם כן מהוא ?

(ג) מהם היתרונות והחסרונות של שיטה זו ?

(א) טורי טיילור:

$$\begin{aligned}
f(x+2h) &= f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2}f''(x)+\frac{(2h)^3}{6}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{24}f''''(x)+\frac{(2h)^5}{120}f^{(v)}(x)+O(h^6) \\
f(x+h) &= f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f''''(x)+\frac{h^5}{120}f^{(v)}(x)+O(h^6) \\
f(x-h) &= f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f''''(x)-\frac{h^5}{120}f^{(v)}(x)+O(h^6) \\
f(x-2h) &= f(x)-2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2}f''(x)-\frac{(2h)^3}{6}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{24}f''''(x)-\frac{(2h)^5}{120}f^{(v)}(x)+O(h^6)
\end{aligned}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} f(x+h)-2f(x)+f(x-h) &= h^2f''(x)+\frac{1}{12}h^4f''''(x)+O(h^6) \\ f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h) &= 4h^2f''(x)+\frac{4}{3}h^4f''''(x)+O(h^6) \end{aligned}$$

ו-

$$16\left(f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\right)-\left(f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)\right)=12h^2f''(x)+O(h^6)$$

והתוצאה נובעת מיד.

(ב) כרגיל מציבים $u_{i,j}=\lambda^j e^{i\sqrt{-2}\mu}$ לקבל

$$\frac{\lambda-1}{k}=\frac{-e^{-2\sqrt{-1}\mu}+16e^{-\sqrt{-1}\mu}-30+16e^{\sqrt{-1}\mu}-e^{2\sqrt{-1}\mu}}{12h^2}=\frac{-2\cos 2\mu+32\cos\mu-30}{12h^2}$$

ולכן

$$\lambda=1-\frac{r(\cos 2\mu-16\cos\mu+15)}{6}=1-\frac{r(2\cos^2\mu-16\cos\mu+14)}{6}=1-\frac{r(7-\cos\mu)(1-\cos\mu)}{3}$$

כאשר כתבנו $r=\frac{k}{h^2}$. הפונקציה $(7-c)(1-c)$ היא גדול או שווה 0 אם $-1\le c\le 1$. הפונקציה היא פרבולה עם מינימום כאשר $c=4$. לכן היא מונוטונית יורדת בקטע $-1\le c\le 1$ עם ערך מקסימלי 16 כאשר $c=-1$. ולכן יש לדורש $r\le\frac{3}{8}$ כתנאי יציבות.

(ג) יתרון - דיוק גבוה. חסרון - תנאי יציבות חזק מהרגיל $r\le\frac{1}{2}$, קושי ביישום בשפות בגלל שהמשוואה רק נכונה ל- $2\le i\le N-2$ ולא ניתן למצוא $u_{1,j},u_{N-1,j}$ דרך שיטה זו.

---

4. המחיר $S(t)$ של מניה מסויימת מקיים את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dS=S\left(rdt+\left(a+b(S-S_0)^2\right)dW_1+c\,dW_2\right)$$

כאשר r,a,b,c,S_0 הם קבועים חיוביים ו- W_1,W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים. הוכח שהתוחלת

$$u(x,t)=\mathbf{E}[e^{-rT}(S(T)-K)_+|S(t)=x]$$

(K,T קבועים) מקיימת את המד"ח

$$u_t+rxu_x+\frac{1}{2}x^2\left((a+b(x-S_0)^2)^2+c^2\right)u_{xx}=ru$$

מהם תנאיי הסוף ותנאיי השפה הרלוונטיים למשוואה זו

(א) לאופציית put אירופאית ?

(ב) לאופציית put אירופאית עם מחסום מסוג down and out ?

(ג) לאופציית put אמריקאית ?

נוסחת פיינמן-כץ הרב-מימדי: אם התהליכי איטו $X_i(t)$ מקיימים את המד"ס

$$dX_i = a_i(X,t)dt + \sum_k b_{ik}(X,t)dW_k$$

ו-

$$u(x,t) = \mathbf{E}[e^{-r(T-t)}X(T)|X(t)=x]$$

אזי

$$u_t + \sum a_i(x,t)u_{x_i} + \frac{1}{2}\sum\sum\sum b_{ik}(x,t)b_{jk}(x,t)u_{x_ix_j} = ru$$

כאן יש רק משתנה מקרי $X_1 = S$ אחד אבל יש שני רעשים בלתי תלויים W_1, W_2

$$a_1(S,t) = rS\ , \qquad b_{11}(S,t) = S(a+b(S-S_0)^2)\ , \qquad b_{12}(S,t) = cS$$

והתוצאה נובעת מיד.

(א) מחפשים פתרון עבור $x > 0$, $0 < t < T$.
תנאי סוף: $u(x,T) = (K-x)_+$.
תנאי שפה אחד: $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$.
תנאי שפה שני: $u(0,t) = Ke^{-r(T-t)}$.

(ב) מחפשים פתרון עבור $x > B$, $0 < t < T$, B המחסום .
תנאי סוף: $u(x,T) = (K-x)_+$. (שים לב: רק עבור $x > B$)
תנאי שפה אחד: $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$.
תנאי שפה שני: $u(B,t) = 0$.

(ג) מחפשים פתרון עבור $x > x_C(t)$, $0 < t < T$, $x_C(t)$ ה- early exercise price.
תנאי סוף: $u(x,T) = 0$.
תנאי שפה אחד: $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$.
תנאי שפה שני: $u(x_C(t),t) = K - x_C(t)$.
תנאי שפה נוסף: $u_x(x_C(t),t) = -1$.

---

5. יש לענות או על סעיף (א) או על סעיף (ב)

(א) (המשך שאלה 1.) כתוב קוד מטלב לחשב את הערך של התוחלת בסעיף (ב) כפונקציה של b ובהנחה ש- $S(0) = S_0$. יש לתת למשתמש לבחור טווח של ערכים של b ולצייר גרף של התוחלת כפונקציה של b. אין להניח ש- b הוא בהכרח קטן. שאר הפרמטרים ניתן לקבוע בתוך הקוד.

(ב) (המשך שאלה 4.) כתוב קוד מטלב למצוא את המחירים של אופציית put אירופאית על המניה. ניתן להשתמש בכל שיטה לפתור את המשוואה הרלוונטית, כמו כן ניתן או לבצע או לא לבצע החלפות קואורדינטות להביא את המשוואה לצורה נוחה יותר.

אופציה (א):

```
function [price,error,bls] = q5a(b)
```

```
% define all the parameters except b
r = 0.1;
a = 0.05;
c = 0.2;
S0 = 0.95;
K = 1;
T = 2;


% numerical parameters
N=200;
M=50000;
Z1=randn(M,N);
Z2=randn(M,N);     % use the same random variables for all values of b
h = T/N;
price = zeros(size(b));     % put the answers in here
error = zeros(size(b));     % put the errors in here


% do the simulation
for i=1:length(b)
    S = S0 * ones(M,1);
    for j=1:N
        S = S.*(1 + r*h + (a + b(i)*(S-S0).^2)*sqrt(h).*Z1(:,j) + c*sqrt(h)*Z2(:,j));
    end
    price(i) = exp(-r*T)*mean( (S-K).*(S>K) ) ;
    error(i) = exp(-r*T)*std( (S-K).*(S>K) )/sqrt(M) ;
end


% do the plot
plot( b , price)


% get the correct answer for b=0
bls=blsprice(S0,K,r,T,sqrt(a^2+c^2));
```

```
% I got very poor results with this program -
% I would be very happy if someone could explain why
```

אופציה (ב):
