

זמן המבחן: 90 דקות.
 מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
 יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.
 יש לנמק היטב כל תשובה.

1. התהליך הסטוכסטי $X(t)$ מקיים את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dX = aX(2 - X)dt + \sigma dW$$

ו- $X(0) = 0$. יש צורך לחשב

$$p(T) = P(\max_{0 < t < T} X(t) < 1).$$

(a, σ ו- T קבועים חיוביים).

(א) כתוב את שיטת אויילר מרוימה לתהליך $X(t)$, והסבר איך היית משתמש בה במסגרת שיטת מונטה-קרלו למצוא את $p(T)$ ל- T מסויים.

(ב) האם לדעתך $p(T)$ היא פונקציה עולה או פונקציה יורדת של (כל אחד מ-) הפרמטרים a, σ, T ?

(ג) מה הם מקורות הטעות בחישוב $p(T)$?

(ד) אם משנים את המד"ס ל- $dX = -2a \log(1 - X)dt + \sigma dW$ איך זה ישפיע על החישוב (שים לב ש- $\log(1 - X)$ אינו מוגדר אם $X \geq 1$)?

2. המחיר $S(t)$ של נכס מסויים מתנהג לפי תנועה בראונית גאומטרית

$$dS = S(rdt + \sigma dW)$$

חוזה "לא מפסידים" עם זמן פרעון T ומחסום $B \geq S(0)$ הוא חוזה לשלם למחזיק החוזה, בזמן T , את הסכום $S(T)$ אם גם $S(T) \geq S(0)$ וגם $\max_{0 < t < T} S(t) \leq B$, או את הסכום $S(0)$ אחרת.

(א) הסבר למה הערך (הנוכחי) של חוזה זה עולה עם B . מהו הערך אם $B = S(0)$? הסבר למה ל- B גדול הערך הוא $S(0) \exp(-rT)$ ועוד הערך של אופציית call עם מחיר מימיוש $S(0)$.

(ב) הסבר איך היית עושה חישוב של ערך החוזה, לערכים נתונים של r, σ, T ו- B . אין לכתוב קוד Matlab מפורש, אבל יש להסביר את כל השיקולים הרלוונטיים בכתובת תוכנה כזו.

(ג) הסבר איך היית מחשב את הערך B^* של המחסום שעבורו הערך הנוכחי של החוזה הוא $S(0)$.

(ד) הערך של σ אינו ידוע באופן מדויק. איך היית מעריך את הדיוק המנימלי הנדרש ב- σ כדי שהטעות ב- B^* לא תעלה על 5%?

3. הסבר בקצרה את שיטת אויילר ואת שיטת Crank Nicolson לפתרון הבעיה

$$u_t = u_{xx} + (2 + \sin x)u_x, \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0$$

עם תנאי דיריכלה, כלומר בהנחה ש- $u(0, t)$ ו- $u(2\pi, t)$ הם ידועים.
אם במקום תאני דיריכלה יודעים שקיימים "תנאי שפה מחזוריים", כלומר נתון ש-
 $u_x(0, t) = u_x(2\pi, t)$ ו- $u(0, t) = u(2\pi, t)$ מה צריך לשנות בשיטת אויילר ? ולמה זה מקלקל
את שיטת Crank Nicolson ?

בהצלחה!