

זמן המבחן: 90 דקות.
 מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
 יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.
 יש לנמק היטב כל תשובה.

1. למשתנה המקרי X יש פונקציית הסתברות מצטברת

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-ax}}, \quad -\infty < x < \infty$$

ופונקציית צפיפות

$$f(x) = \frac{ae^{-ax}}{(1 + e^{-ax})^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

כאשר a הוא קבוע חיובי. התוחלת של X שווה 0 והשונות הוא $\frac{\pi^2}{3a^2}$.

- (א) איך ניתן להשתמש בדגימות מההתפלגות האחידה בקטע $[0, 1]$ לייצור דגימות מה-
 התפלגות של X ?
 (ב) קיים אי-שיוויון

$$e^{-x^2/2} \leq \frac{4e^{-x\sqrt{2}}}{(1 + e^{-x\sqrt{2}})^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

- איך ניתן לנצל את זה לייצור דגימות מההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית בהנתן
 דגימות מההתפלגות של X ומההתפלגות האחידה בקטע $[0, 1]$?
 (ג) בסימולציה של תהליך וינר בטעות משתמשים במספרים אקראיים מההתפלגות של
 X עם $a = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ במקום מספרים אקראיים נורמליים סטנדרטיים. איך זה ישפיע ?

2. המחירים של שני נכסים $S_1(t)$ ו- $S_2(t)$ מתנהגים לפי

$$\begin{aligned} dS_1 &= S_1(rdt + \sigma_{11}dW_1 + \sigma_{12}dW_2) \\ dS_2 &= S_2(rdt + \sigma_{21}dW_1 + \sigma_{22}dW_2) \end{aligned}$$

כאשר $r, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ הם קבועים חיוביים, ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים.
 נתון ש- $S_1(0) = S_2(0) = 1$. רוצים לתמחר אופציית put המשלמת $K - S_1(T) - S_2(T)$
 בזמן T , אם הסכום הזה הוא גדול מ-0, ו-0 אחרת.

- (א) הסבר בקצרה את התהליך הסטנדרטי של יצירת דגימות של $W_1(T)$ ו- $W_2(T)$ ושימוש
 בהם, במסגרת סימולציית מונטה-קרלו, למצוא את ערך האופציה.
 (ב) למה, במקרה שהמחסום K הוא הרבה מתחת ל- $S_1(0) + S_2(0)$, התהליך הזה עלול
 להיות לא יעיל ?
 (ג) על ידי שימוש במשפט מסויים ניתן למצוא קבועים c_1, c_2, c_3 , עם c_1, c_2 חיוביים, כך
 שאם $c_1W_1(T) + c_2W_2(T) \geq c_3$ אזי הערך של אופציית ה- put הוא 0. הסבר איך
 ניתן לייצור דגימות של $W_1(T), W_2(T)$ המקיימות $c_1W_1(T) + c_2W_2(T) < c_3$ ולמה זה
 אולי יעזור לפתור את הבעייה שציננת בסעיף הקודם.

3. (א) הוכח ש-

$$\frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4}$$

הוא קירוב לנגזרת הרביעית $f''''(x)$. מהו סדר גודל הטעות?
(ב) כתוב את שיטת אויילר לפתרון המד"ח

$$u_t = -\kappa u_{xxxx}$$

בקטע $0 < x < 1$, כאשר κ הוא קבוע. הסבר למה צריך 4 תנאי שפה.
(ג) מצא תנאי ליציבות השיטה על ידי שיטת וון-נוימן.

בהצלחה!