

זמן הבוחן: 90 דקות.

מוותר להשתמש בכל חומר עזר, מודפס ואלקטרוני.

יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.

יש לכתוב את התשובות שלך על השאלון (ניתן להשתמש בשני צדי הנייר)

יש לכלול את הקוד של התוכנות שלך, הסברים רלוונטיים, ותוצאות נומריות.

אם אפשר נא לשלוח לי תוכנות המחשב שלך בסוף הבוחן.

יש לעשות את הבוחן באופן עצמאי - כל קשר עם גורם אנושי אחר, בחדר או בחוץ, הוא אסור בהחלט. בהצלחה!

1. התהליך הסטוכסטי  $X(t)$  מקיים את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dX = aX(2 - X)dt + \sigma dW, \quad X(0) = 0$$

כאשר  $a, \sigma$  הם קבועים חיוביים. יש צורך לחשב  $p = P(\max_{0 < t < 1} X(t) < 1)$ .

(א) בהנתן  $\sigma = 0.1$ , מצא את  $p$  כפונקציה של  $a$  (צייר גרף!)

(ב) בהנתן  $a = 0.1$ , מצא את  $p$  כפונקציה של  $\sigma$  (צייר גרף!)

2. המחיר  $S(t)$  של נכס מסויים מקיים תנועה בראונית גאומטרית

$$dS = S(0.1dt + 0.5dW)$$

ו-  $S(0) = 1$ . חוזה "לא מפסידים" עם מחסום  $B$  הוא חוזה לשלם למחזיק החוזה, בזמן  $t = 1$ , את הסכום  $S(1)$  אם גם  $S(1) \geq S(0)$  וגם  $\max_{0 < t < 1} S(t) \leq B$ , או את הסכום 1 אחרת. מצא אומדנים לערך הנוכחי של חוזה זה במקרים  $B = 1.7$ ,  $B = 2.0$ , ו-  $B = 2.2$ . איזה  $B$  יש לקחת אם רוצים שערך החוזה יהיה 1 ?

3. פתור את המד"ח

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xx}, \quad -1 < x < 1, 0 < t < 2$$

עם תנאי שפה  $u(1, t) = 1, u(-1, t) = 0$  ותנאי התחלה  $u(x, 0) = \frac{1}{8}(x+1)^3$ . יש לצייר גרפים של  $u(x, 1)$  ו-  $u(x, 2)$  ולציין את הערכים המקסימליים של  $|u(x, 1) - \frac{1}{2}(x+1)|$  ו-  $|u(x, 2) - \frac{1}{2}(x+1)|$