

זמן המבחן: 90 דקות.
 מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
 יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.
 יש לנמק היטב כל תשובה.

1. התהליכים הסטוכסטיים $X(t), Y(t)$ מקיימים את המד"סים

$$\begin{aligned} dX &= Ydt + \sigma dW_1 \\ dY &= -Xdt + \sigma dW_2 \end{aligned}$$

כאשר σ הוא קבוע חיובי, $X(0) = 1, Y(0) = 0$ ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים.
 (א) כתוב את שיטת אוילר מרוימה לסימולציה של התהליכים $X(t), Y(t)$ והסבר איך ניתן להשתמש בה במסגרת שיטת מונטה קרלו למצוא אומדן ל-

$$C = \mathbf{E}[X(T)^2 + Y(T)^2]$$

כאשר T הוא קבוע חיובי נתון.

(ב) איך צריך לשנות את מה שכתבת בסעיף הקודם אם נתון שתהליכי הוינר W_1, W_2 אינם בלתי תלויים, אלא תלויים עם קורלציה ρ ?

(ג) במקרה $\sigma = 0.2, \rho = 0.3, T = 2$ טוענים שהערך המדויק של C ל-4 ספרות דיוק הוא 1.160. כאשר עשיתי סימולציות מונטה-קרלו עם שיטת אוילר מרוימה קבלתי את התוצאות הבאות:

מספר צעדים N	אומדן ל- C	אומדן הטעות הסטוכסטית
20	1.396	0.0027
40	1.275	0.0026
80	1.216	0.0025
160	1.185	0.0025

איך ניתן להסביר תוצאות אלה? לכל ערך של N עשיתי $M = 50000$ סימולציות.

2. המחיר $S(t)$ של מנייה מסויימת מקיים את המד"ס $dS = S(rdt + \sigma dW)$ כאשר r, σ הם קבועים חיוביים. אופציה אסימטרית על מנייה זו משלמת, בזמן T , את התגמול $(\bar{S} - K)_+$ כאשר \bar{S} הוא הממוצע של המחירים $S(t)$ בתקופה $0 < t < T$, ו- K הוא קבוע חיובי.

(א) הסבר איך לעשות סימולציה פשוטה לחשב את הערך של האופציה.

(ב) הסבר למה במקרה ש- K הוא גבוה הטעות היחסית בסימולציה שלך עלולה להיות גבוהה.

(ג) הסבר איך ניתן להוריד את השונות במקרה ש- K הוא גבוה על ידי שימוש במספרים אקראיים עם התפלגות $N(\mu, 1)$ כאשר $\mu > 0$ במקום משתנים מקריים נורמלים סטנדרטיים. יש לתת נוסחה מפורשת לפונקציה שיש לחשב את התוחלת שלה בשיטה זו. איך ניתן לקבוע את μ ?

3. כתוב את שיטת קרנק-ניקולסון לפתרון הבעיה

$$u_t = \kappa u_{xx} - \lambda u, \quad 0 < x < 1, 0 < t < 1$$

עם תנאי שפה

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1$$

κ ו- λ הם קבועים חיוביים ויש להניח שנתון תנאי התחלה $u(x, 0)$ יש להקפיד לכתוב מפורש את המערכת התלת-אלכסונית שיש לפתור בכל צעד.

כאשר הפעלתי את שיטת קרנק-ניקולסון לבעיה זו (עם $\kappa = 1$, $\lambda = 2$, $u(x, 0) = x^2$) הערכים שקבלתי ל- $u(0, 1)$ היו תלויים על מספר הצעדים בכיוון x (N) ועל מספר הצעדים בכיוון t (M) כדלהלן:

	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$
$M = 10$	0.45436	0.45427	0.45421
$M = 20$	0.45407	0.45397	0.45392
$M = 40$	0.45400	0.45390	0.45384

הסבר!

בהצלחה!