בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית, פרופ' ג'רמי שיף, 88-636

מבחן מועד א', סמסטר א' תשע"ד - פתרונות

זמן המבחן: 90 דקות.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.
יש לנמק היטב כל תשובה.

1. התהליכים הסטוכסטיים $X(t), Y(t)$ מקיימים את המד"סים

$$\begin{aligned} dX &= Y dt + \sigma dW_1 \\ dY &= -X dt + \sigma dW_2 \end{aligned}$$

כאשר σ הוא קבוע חיובי, $X(0) = 1$, $Y(0) = 0$ ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים.

(א) כתוב את שיטת אוילר מרוימה לסימולציה של התהליכים $X(t), Y(t)$ והסבר איך ניתן להשתמש בה במסגרת שיטת מונטה קרלו למצוא אומדן ל-

$$C = \mathbf{E}[X(T)^2 + Y(T)^2]$$

כאשר T הוא קבוע חיובי נתון.

(ב) איך צריך לשנות את מה שכתבת בסעיף הקודם אם נתון שתהליכי הוינר W_1, W_2 אינם בלתי תלויים, אלא תלויים עם קורלציה ρ ?

(ג) במקרה $\sigma = 0.2$, $\rho = 0.3$, $T = 2$ טוענים שהערך המדויק של C ל-4 ספרות דיוק הוא 1.160. כאשר עשיתי סימולציות מונטה-קרלו עם שיטת אויילר מרוימה קבלתי את התוצאות הבאות:

מספר צעדים N	אומדן ל-C	אומדן הטעות הסטוכסטית
20	1.396	0.0027
40	1.275	0.0026
80	1.216	0.0025
160	1.185	0.0025

איך ניתן להסביר תוצאות אלה? לכל ערך של N עשיתי $M = 50000$ סימולציות.

(א) מוצאים קירובים X_n, Y_n לערכים המדוייקים $X(nh), Y(nh)$ של מסלול בנקודות $t = nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ על ידי

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + hY_n + \sigma\sqrt{h}Z_{1n} \\ Y_{n+1} &= Y_n - hX_n + \sigma\sqrt{h}Z_{2n} \end{aligned}$$

כאשר Z_{1n}, Z_{2n} הם משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים בלתי תלויים. תנאיי התחלה: $X_0 = 1, Y_0 = 0$. אם בוחרים $h = \frac{T}{N}$ כאשר N הוא שלם מספיק גדול, אזי X_N, Y_N הם הקירובים ל $X(T), Y(T)$ ולכן $X_N^2 + Y_N^2$ הוא קירוב ל- $C = X(T)^2 + Y(T)^2$. אם עושים הרבה הרצות M של תהליך זה מקבלים M ערכים של C וניתן למצוא קירוב ל- $\mathbf{E}[C]$ מהממוצע של הערכים. הטעות הסטוכסטית היא מסדר גודל $\frac{s}{\sqrt{M}}$ כאשר s היא סטיית התקן של הערכים של C. יש גם טעות דטרמיניסטית שיורדת עם N כ- $\frac{1}{N}$.

(ב) ממש אותו דבר אבל במקום Z_{2n} יש להשתמש ב- $\rho Z_{1n}+\sqrt{1-\rho^2}Z_{2n}$ לייצור את הקורלציה הרצויה.

(ג) האומדנים לטעות הסטוכסטי הם מסדר גודל 0.003, אבל בין התוצאות שהתקבלו אפילו לשני הערכים הגבוהים יותר של N רואים פער של 0.03. לכן בתוצאות אלה ברור שהטעות הדטרמינסטית היא הטעות הדומיננטית. אם לוקחים את התוצאה המדוייקת להיות 1.160 אזי הטעויות ל-4 הערכים של N הם $0.236, 0.115, 0.056, 0.025$ - כל פעם הטעות יורדת בערך בחצי עד כדי האי-דיוקים מסדר גודל של 0.003 שנובעים מהטעויות הסטוכסטיות.

---

2. המחיר $S(t)$ של מנייה מסויימת מקיים את המד"ס $dS=S(rdt+\sigma dW)$ כאשר r,σ הם קבועים חיוביים. אופציה אסיאתית על מנייה זו משלמת, בזמן T, את התגמול $(\overline{S}-K)_+$ כאשר $\overline{S}$ הוא הממוצע של המחירים $S(t)$ בתקופה $0<t<T$, ו- K הוא קבוע חיובי.

(א) הסבר איך לעשות סימולציה פשוטה לחשב את הערך של האופציה.

(ב) הסבר למה במקרה ש- K הוא גבוה הטעות היחסית בסימולציה שלך עלולה להיות גבוהה.

(ג) הסבר איך ניתן להוריד את השונות במקרה ש- K הוא גבוה על ידי שימוש במספרים אקראיים עם התפלגות $N(\mu,1)$ כאשר $\mu>0$ במקום משתנים מקריים נורמלים סטנדרטיים. יש לתת נוסחה מפורשת לפונקציה שיש לחשב את התוחלת שלה בשיטה זו. איך ניתן לקבוע את μ ?

(א) כמו בשאלה 1, יש לבנות סימולציות של המסלולים, אבל הפעם יש להשתמש ב"פתרון המדויק" ל- GBM

$$S_{n+1}=S_n e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)h+\sigma\sqrt{h}Z_n}$$

מכל מסלול ניתן לקבל אומדן ל $\overline{S}$ על ידי

$$\overline{S}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}S_n$$

(יש גם אפשרויות אחרות כגון

$$\overline{S}=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{2}S_0+\sum_{n=1}^{N-1}S_n+\frac{1}{2}S_N\right)$$

שזה אולי עדיף.) ואז עושים מונטה קלרו - לוקחים M ערכים של $\overline{S}$, מחשבים את הממוצע ואת סטיית התקן s של הערכים של $e^{-rT}\left(\overline{S}-K\right)_+$ והממוצע הוא קירוב לערך, עם טעות סטוכסטית $\frac{s}{\sqrt{M}}$.

(ב) אם K הוא גבוה אזי ברוב המסלולים שנבנה נקבל ערך 0, ורק נסתכל על מעט מסלולים "מעניינים". ולכן הטעות היחסית בתוצאה תהיה גבוהה - היות וההשפעה של התנודות הסטוכסטיות במעט המסלולים המעניינים תהיה גדולה.

(ג) בעצם אנחנו מחשבים כאן את

$$\mathbf{E}\left[e^{-rT}\left(\overline{S}-K\right)_+\right]=\int\int\ldots\int e^{-rT}\left(\overline{S}-K\right)_+\frac{e^{-\frac{1}{2}(Z_1^2+Z_2^2+\ldots+Z_N^2)}}{(2\pi)^{N/2}}dZ_1dZ_2\ldots dZ_N$$

ניתן לכתוב את האנטגרל גם בצורה

$$\int\int\ldots\int e^{-rT}\left(\overline{S}-K\right)_+ e^{\frac{N}{2}\mu^2-\mu\sum Z_n}\frac{e^{-\frac{1}{2}((Z_1-\mu)^2+(Z_2-\mu)^2+\ldots+(Z_N-\mu)^2)}}{(2\pi)^{N/2}}\,dZ_1dZ_2\ldots dZ_N$$

כלומר, זה התוחלת

$$\mathbf{E}\left[e^{-rT}\left(\overline{S}-K\right)_+ e^{\frac{N}{2}\mu^2-\mu\sum Z_n}\right]$$

כאשר עכשיו למשתנים המקריים יש התפלגות $N(\mu,1)$.
השונות מן הסתם ירד כאשר μ עולה עד לאיזה שהוא ערך אופטימלי. לקבוע את הערך האופטימלי יש לעשות מספר ניסויים לערכים שונים של μ - ניתן לקחת M קטן בסימולציות אלה עד שקובעים ערך של μ הנותן הורדת שונות קרובה לאופטימלית.

---

3. כתוב את שיטת קרנק-ניקולסון לפתרון הבעייה

$$u_t=\kappa u_{xx}-\lambda u\ ,\quad 0<x<1, 0<t<1$$

עם תנאי שפה

$$u_x(0,t)=0\ ,\quad u(1,t)=1$$

κ ו- λ הם קבועים חיוביים ויש להניח שנתון תנאי התחלה $u(x,0)$. יש להקפיד לכתוב מפורש את המערכת התלת-אלכסונית שיש לפתור בכל צעד.

כאשר הפעלתי את שיטת קרנק-ניקולסון לבעיה זו (עם $\kappa=1$, $\lambda=2$, $u(x,0)=x^2$) הערכים שקבלתי ל- $u(0,1)$ היו תלויים על מספר הצעדים בכיוון x (N) ועל מספר הצעדים בכיוון t (M) כדלהלן:

	$N=10$	$N=20$	$N=40$
$M=10$	0.45436	0.45427	0.45421
$M=20$	0.45407	0.45397	0.45392
$M=40$	0.45400	0.45390	0.45384

הסבר!

שיטת אויילר לבעיה זו היא

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}=-\lambda u_{i,j}+\kappa\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

או

$$u_{i,j+1}=(1-\lambda k)u_{i,j}+\frac{\kappa k}{h^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})$$

כאן כרגיל $u_{i,j}$ מסמן את הקירוב להפתרון הבעיה ב- $x=ih, t=jk$ כאשר h,k הם גודלי הצעד בכיוונים x,t בהתאם. האינדקס i רץ מ-0 עד N אבל המשוואה למעלה רק חלה ל- $1\leq i\leq N-1$. למצוא את $u_{j+1,i}$ כאשר $i=0,N$ יש צורך להשתמש בתנאיי שפה. במקרה זה, $u_{N,j}=1$ לכל j. ומוצאים את $u_{0,j}$ מהדרישה $3u_{0,j}-4u_{1,j}+u_{2,j}=0$ לכל j שהיא קירוב לתנאי השפה $u_x=0$ ב- $x=0$.

בשיטת קרנק ניוקלסון נעבור מצעד j לצעד $j+1$ על ידי פתרון המערכת התלת-אלכסונית

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}=\frac{1}{2}\left(-\lambda u_{i,j}+\kappa\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}-\lambda u_{i,j+1}+\kappa\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}\right)$$

או

$$-\frac{\kappa k}{2h^2}u_{i+1,j+1}+\left(1+\frac{\lambda k}{2}+\frac{\kappa k}{h^2}\right)u_{i,j+1}-\frac{\kappa k}{2h^2}u_{i-1,j+1}=R_i \qquad (*)$$

כאשר

$$R_i=\frac{\kappa k}{2h^2}u_{i+1,j}+\left(1-\frac{\lambda k}{2}+\frac{\kappa k}{h^2}\right)u_{i,j}+\frac{\kappa k}{2h^2}u_{i-1,j}$$

המשוואה $(*)$ חלה ל- $1\le i\le N-1$, אבל יש $N+1$ "משתנים" $u_{0,j+1},\dots,u_{N,j+1}$.
היות ונתון ש- $u_{N,j}=1$ לכל j אנחנו יכולים לכתוב את המשוואה $(*)$ במקרה $i=N-1$ בצורה

$$\left(1+\frac{\lambda k}{2}+\frac{\kappa k}{h^2}\right)u_{N-1,j+1}-\frac{\kappa k}{2h^2}u_{N-2,j+1}=R_{N-1}+\frac{\kappa k}{2h^2} \qquad (*')$$

כדאי לחשב את $u_{0,j+1}$ ניישם את התנאי

$$u_{0,j}-\frac{4}{3}u_{1,j}+\frac{1}{3}u_{2,j}=0$$

וכך במקרה $i=1$ המשוואה $(*)$ היא

$$-\frac{2\kappa k}{3h^2}u_{2,j+1}+\left(1+\frac{\lambda k}{2}+\frac{2\kappa k}{3h^2}\right)u_{1,j+1}=R_1 \qquad (*'')$$

$(*')$, $(*'')$ ו-$(*)$ במקרים $2\le i\le N-2$ הם המערכת התלת-אלכסונית שיש לפתור למצוא את $u_{1,j+1},\dots,u_{N-1,j+1}$. כלומר המערכת הרלוונטית היא

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{\lambda k}{2}+\frac{2\kappa k}{3h^2} & -\frac{2\kappa k}{3h^2} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{\kappa k}{2h^2} & 1+\frac{\lambda k}{2}+\frac{\kappa k}{h^2} & -\frac{\kappa k}{2h^2} & 0 & \cdots \\ 0 & -\frac{\kappa k}{2h^2} & 1+\frac{\lambda k}{2}+\frac{\kappa k}{h^2} & -\frac{\kappa k}{2h^2} & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{N-1,j+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{N-1}+\frac{\kappa k}{2h^2}\end{pmatrix}$$

רק המקדמים בשורה הראשונה של המטריצה הן (קצת) שונים בגלל תנאי השפה.

לגבי תוצאות החישוב - בשיטת קרנק ניקולסון, ככל ש- M,N הם יותר גדולים הטעות צריכה לרדת, ויש תרומות לטעות מסדר גודל $O\left(\frac{1}{M^2}\right)$ ומסדר גודל $O\left(\frac{1}{N^2}\right)$.
בתוצאות רואים ירידה יותר משמעותית של הטעויות כאשר יורדים בעמודים ממה שרואים כאשר עוברים משמאל לימין בשורות. לדוגמה בעמודה $N=10$ יש שינוי 0.00029 מהשורה הראשונה לשנייה, אבל רק 0.00007 מהשורה השנייה לשלישית - ירידה של רבע בהתאם להתנהגות $\frac{1}{M^2}$.
בשורה $M=10$ יש ירידה הרבה יותר מתונה, מ- 0.00009 ל- 0.00006. אני חששתי לטעות כאשר ראיתי מספרים אלה. אבל מתברר שה- N הוא פשוט קטן מדי. כאשר עושים אותו דבר עם $N=100,200,400$ יש ירידה של כמעט רבע, כצפוי.