

זמן המבחן: 90 דקות.  
 מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.  
 יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.  
 יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) כתוב את שיטת אויילר-מרוימה ואת שיטת מילשטיין לפתרון המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dX = X(X^2 - 4)dt + \frac{1}{4}\sqrt{|X|}dW$$

(ב) הסבר איך היית משתמש באחת השיטות מהסעיף הקודם למצוא את  $P(X(3) > 0)$  בהנתן  $X(0) = 0.3$ .

(ג) כאשר הפעלתי את שיטת אויילר-מרוימה עם  $M = 100,000$  סימולציות קבלתי תוצאות כדלהלן:

מספר תת-קטעים ב- $[0, 3]$	אומדן להסתברות	טעות סוכסטית
100	0.6810	0.0015
200	0.6916	0.0015
400	0.7011	0.0014
800	0.7022	0.0014

כאשר עשיתי אותו דבר עם שיטת מילשטיין קבלתי תוצאות:

מספר תת-קטעים ב- $[0, 3]$	אומדן להסתברות	טעות סוכסטית
100	0.6903	0.0015
200	0.6979	0.0015
400	0.7017	0.0014
800	0.7010	0.0014

האם ניתן לקבוע איזה שיטה נתנה תוצאות טובות יותר ?

2. לשתי מניות יש מחירים  $S_1(t), S_2(t)$  המקיימים את המשוואות

$$dS_1 = S_1(rdt + \sigma_1 dW_1)$$

$$dS_2 = S_2(rdt + \sigma_2 dW_2)$$

כאשר  $r, \sigma_1, \sigma_2$  הם קבועים חיוביים ו-  $W_1, W_2$  הם תהליכי וינר בלתי תלויים. רוצים לתמחר חוזה שתשלם, בזמן  $T$ , את הסכום  $S_2(T) - S_1(T)$  אם זה גדול מ-0, ו-0 אחרת. יש לקחת את שער הריבית לנכס חסר סיכון להיות  $r$ .

(המשך בעמוד הבא)

(א) תאר איך ניתן לעשות סימולציית מונטה-קרלו פשוטה לקבל אומדן למחיר הסביר של החוזה.

(ב) למה במקרה ש- $\sigma_1$  הוא קטן ניתן להגיד שמחיר החוזה הוא בערך שווה למחיר אופציית call על המנייה השניה עם מחיר מימוש  $S_1(0)e^{rT}$  ?

(ג) איך ניתן לנצל את העובדה מסעיף (ב) לשפר את הסימולציה בסעיף (א) ?

3. (א) הוכח שאם  $h$  הוא קטן אזי גם

$$\frac{f(x+h) - 3f(x) + 3f(x-h) - f(x-2h)}{h^3}$$

וגם

$$\frac{f(x+2h) - 3f(x+h) + 3f(x) - f(x-h)}{h^3}$$

הם קירובים ל- $f'''(x)$ . מהו סדר גודל הטעות בנוסחאות אלו? (ניתן להניח שלפונקציה  $f(x)$  יש פיתוח טיילור לכל סדר.)

(ב) אם רוצים לפתור את הבעיה

$$u_t = u_{xxx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

עם תנאי התחלה  $u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{2}$  ותנאי שפה  $u(1, t) = 0, u_x(0, t) = 0, u(0, t) = 1$  למה עדיף להתשמש בשיטת אוילר בצורה

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{k}{h^3} (u_{i+1,j} - 3u_{i,j} + 3u_{i-1,j} - u_{i-2,j})$$

ולא בצורה

$$? \quad u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{k}{h^3} (u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} + 3u_{i,j} - u_{i-1,j})$$

(כרגיל  $h$  מסמן את גודל הצעד בכיוון  $x$ ,  $k$  מסמן את גודל הצעד בכיוון  $t$  ו- $u_{i,j}$  הוא קירוב ל- $u(ih, jk)$ ,  $0 \leq i \leq N = \frac{1}{h}, j \geq 0$ .)

(ג) כאשר הפעלתי את שיטת אוילר כמו שהוצע בסעיף הקודם, מצאתי שהשיטה עובדת אבל רק עבור  $k$  מאוד קטן ( $k$  לא יותר מ- $\frac{1}{3300}$  כאשר  $h = \frac{1}{10}$ ). האם אתה יכול להציע דרך להתגבר על בעיה זו? האם זה ישפר את היעילות?

בהצלחה!