

זמן הבוחן: 90 דקות.

מותר להשתמש בכל חומר עזר, מודפס ואלקטרוני.

יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.

יש לכתוב את התשובות שלך על השאלון. ניתן להשתמש בשני צדי הנייר.

בתשובה יש לכלול קטעי קוד רלוונטיים, הסברים על שיטת הפתרון, תוצאות נומריות וניתוחן.

יש לעשות את הבוחן באופן עצמאי - כל קשר עם גורם אנושי אחר, בחדר או בחוץ, הוא אסור בהחלט. בהצלחה!

1. התהליכים הסטוכסטיים $X(t), Y(t)$ מקיימים את המד"סים

$$dX = Y dt + \sigma dW_1$$

$$dY = -X dt + \sigma dW_2$$

כאשר $\sigma = 0.25$, $X(0) = 1$, $Y(0) = 0$ ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר עם קורלציה ρ . העזר בשיטת אויילר-מרוימה ושיטת מונטה-קרלו למצוא אומדן ל-

$$C(\rho) = \mathbf{E}[X(2)^2 + Y(2)^2]$$

יש לתת (1) אומדנים מספריים ל- $C(-0.3), C(0), C(0.3)$, (2) גרף של האומדן ל- $C(\rho)$ כפונקציה של ρ ו- (3) גרף של של הטעות הסטוכסטית באומדן כפונקציה של ρ .

2. המחיר $S(t)$ של מניה מקיים את המד"ס

$$dS = S \left(rdt + \frac{\sigma dW}{1 + \alpha S^2} \right)$$

כאשר $r = 0.06, \sigma = 0.2, \alpha = 0.04$. המחיר היום הוא $S(0) = 1$. מצא אומדנים למחיר ההוגן של שלוש האופציות הבאות:

- (א) אופציית call רגיל, שהתגמול שלו הוא $(S(T) - K)_+$ בזמן T . יש לקחת $T = 1, K = 1$.
(ב) אופציית max, שהתגמול שלו הוא $(S_m - K)_+$ בזמן T . יש לקחת $T = 1, K = 1$.

$$S_m = \max_{0 \leq t \leq T} S(t)$$

- (ג) אופצייה אסימטרית, שהתגמול שלו הוא $(\bar{S} - K)_+$ בזמן T . יש לקחת $T = 1, K = 1$.

$$\bar{S} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$$

3. פתור את הבעיה

$$u_t = \kappa u_{xx} - \lambda u, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

כאשר $\kappa = 2, \lambda = 2$. יש לקחת תנאי התחלה

$$u(x, 0) = x^2$$

ותנאי שפה

$$u_x(0, t) = 0, u(1, t) = 1$$

יש לצייר גרף של הפתרון עבור $t = 0.5$ ועבור $t = 1$, ולתת ערכים נומריים של $u(0, 1)$ ו- $u(0.8, 1)$ ל-3 ספרות דיוק.