

זמן המבחן: 90 דקות.
 מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשבון מדעי.
 יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. התהליכים הסטוכסטיים $X(t), Y(t)$ מקיימים את המד"סים

$$\begin{aligned} dX &= X(Y - 1)dt + \sigma_1 dW_1 \\ dY &= Y(1 - X)dt + \sigma_2 dW_2 \end{aligned}$$

כאשר σ_1, σ_2 הם קובעים חיוביים ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים. נתון ש- $X(0) = Y(0) = 1$, ורוצים לחשב את ההסתברות $P(T)$ שגם $X(t)$ וגם $Y(t)$ הם חיוביים עבור $0 \leq t \leq T$ (מספר חיובי נתון).

- (א) הסבר איך לעשות סימולציה למצוא אומדן ל- $P(T)$. (אין לכתוב פקודות מטלב. יש להסביר במילים עם משוואות רלוונטיות.)
- (ב) איך היית צריך לשנות את הסימולציה אם היה נתון ש- W_1 ו- W_2 הם תהליכי וינר תלויים?
- (ג) הסבר למה $P(T)$ יורדת כאשר T, σ_1 או σ_2 עולים.
- (ד) יוצא ש- $\lim_{T \rightarrow \infty} P(T) = 0$. איך יתנהג הדיוק של הסימולציה שלך עבור T גדול?

2. המחיר $S(t)$ של נכס מסויים מתנהג לפי המד"ס

$$dS = S(rdt + \sigma dW)$$

כאשר r, σ הם קבועים חיוביים, והזמן t נמדד בשנים, כאשר שנה היא 252 ימים. לחבר שלי יש הרבה מהנכס, ואני רוצה לקנות חלק מאחזקתו. החבר מציע לי חוזה כזה: שבשנה הקורבה, בכל יום שבו מחיר הנכס בשוק הוא מתחת ל- B אני אקנה ממנו יחידה אחת במחיר B (בימים אלה אני מפסיד), ובכל יום שבו מחיר הנכס בשוק הוא מעל B אני אקנה ממנו x יחידות במחיר B (בימים אלה אני מרוויח). x אינו בהכרח שלם.

- (א) הסבר למה ערך החוזה (בשבילי) עולה ככל ש- x יותר גדול, אבל יורד ככל ש- B יותר גדול.
- (ב) הסבר איך לעשות סימולציה של ערך החוזה. (אין לכתוב פקודות מטלב. יש להסביר במילים עם משוואות רלוונטיות.)
- (ג) למה יש קושי בסימולציה אם B הוא גבוה (כלומר B הרבה יותר גדול מהמחיר ההתחלתי $S(0)$) ואיך ניתן להתגבר על בעיה זו על ידי importance sampling? יש לתת את הנוסחאות הרלוונטיות ליישום ה- importance sampling.

3. כתוב את שיטת Crank-Nicolson לפתרון משוואת החום

$$u_t = \kappa u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$

עם תנאי התחלה $u(x, 0) = bx(2 - x)$ ותאנני שפה $u(0, t) = 0$ ו- $u(1, t) = b$. כאן גם κ וגם b הם קבועים. (יש לכתוב את המשוואות הליניאריות שיש לפתור בכל זמן כדי ליישם את השיטה, אין צורך לפתור את המשוואות.)

איזה שינויים יש לעשות במשוואות במקרה שגם κ וגם b הם פונקציות של הזמן t ותנאי ההתחלה הוא $u(x, 0) = b(0)x(2 - x)$?

בהצלחה!