<u>שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית 88-636, פרופ' ג'רמי שיף</u>
<u>מבחן מועד א', סמסטר א', תשע"ה - פתרונות</u>

זמן המבחן: 90 דקות.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשבון מדעי.
יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. התהליכים הסטוכסטיים $X(t), Y(t)$ מקיימים את המד"סים

$$\begin{aligned} dX &= X(Y-1)dt + \sigma_1 dW_1 \\ dY &= Y(1-X)dt + \sigma_2 dW_2 \end{aligned}$$

כאשר σ_1, σ_2 הם קובעים חיוביים ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר בלתי תלויים. נתון ש- $X(0) = Y(0) = 1$, ורוצים לחשב את ההסתברות $P(T)$ שגם $X(t)$ וגם $Y(t)$ הם חיוביים עבור $0 \le t \le T$ (T מספר חיובי נתון).

(א) הסבר איך לעשות סימולציה למצוא אומדן ל- $P(T)$. (אין לכתוב פקודות מטלב. יש להסביר במילים עם משוואות רלוונטיות.)

(ב) איך היית צריך לשנות את הסימולציה אם היה נתון ש- W_1 ו- W_2 הם תהליכי וינר תלויים ?

(ג) הסבר למה $P(T)$ יורדת כאשר T, σ_1 ו/או σ_2 עולים.

(ד) יוצא ש- $\lim_{T\to\infty} P(T) = 0$. איך יתנהג הדיוק של הסימולציה שלך עבור T גדול ?

(א) שיטת מונטה קרלו עם אוילר מרוימה לסמלץ את התהליך. מחלקים את הזמן T ל-N חלקים בעלי אורך $h = \frac{T}{N}$. מסמנים על ידי X_i, Y_i את הקירובים ל- $X(ih), Y(ih)$, $i = 0, 1, \ldots, N$. מקבלים את הקירובים מאוילר-מרוימה:

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_i + X_i(Y_i - 1)h + \sigma_1\sqrt{h}Z_{1,i} \\ Y_{i+1} &= Y_i + Y_i(1 - X_i)h + \sigma_2\sqrt{h}Z_{2,i} \end{aligned}$$

כאשר $Z_{1,i}, Z_{2,i}$ הם מספרים אקראיים נורמלים סטנדרטיים בלתי תלויים וכמובן $X_0 = Y_0 = 1$. מחשבים

$$X_{\min} = \min(X_0, X_1, \ldots, X_N)\ , \quad Y_{\min} = \min(Y_0, Y_1, \ldots, Y_N)$$

ורושמים "1" אם שניהם הם מעל 0 ו-"0" אחרת. חוזרים על סימולציה זו M פעמים - והאומדן להסתברות הוא מספר ה"1"ים חלקי M. האומדן לטעות הוא $\sqrt{\frac{p(1-p)}{M}}$ כאשר p הוא האמדן להסתברות .

(ב) אם הקורלציה ביניהם ρ מחליפים את $Z_{2,i}$ בנוסחה למעלה עם $\rho Z_{1,i} + \sqrt{1-\rho^2}Z_{2,i}$.

(ג) כל שהזמן עולה יש יותר סיכוי לאחד התליכים להפוך לחיובי. ולכן $P(T)$ היא פונקציה יורדת של T. לגבי σ_1, σ_2, אם שניהם הם 0 לא זזים מהנקודה $(1,1)$. ככל שהם יותר גדולים יש יותר תנודתיות ולכן ההסתברות "לקפוץ" לתחום שלילי יותר גדולה, ו-$P(T)$ יורדת.

(ד) אם T גדול, יהיו מעט מאוד מקרים מתוך ה-M שבהם נקבל "1". ולכן הדיוק ירד - כי שינויים אקראיים של 1 או 2 בסימולציה ישנו את ההסתברות באופן משמעותי. אם ההסתברות היא קרובה או מתחת ל- $\frac{1}{M}$ יכול להיות שבכלל לא נראה מקרים שבהם התהליכים נשארים חיוביים, למרות שקיימת הסתברות קטנה.

עוד דרך להגיד את זה: כאשר $p \to 0$ הטעות הסטוכסטית $\sqrt{\frac{p(1-p)}{M}}$ שואפת ל- 0. אבל הטעות היחסית היא $\sqrt{\frac{1-p}{pM}}$ שואפת ל- ∞.

עוד דרך: אנחנו מחשבים את ההסתברות של מאורע נדיר - שיש בו תמיד סכנה שנפספס לחלוטין.

כמה סטודנטים שמו לב שאם T גדל ומשאירים את N אותו דבר אזי $h = \frac{T}{N}$ גדל והטעות הדטרמיניסטית עולה. זה נכון אבל לא רלוונטי. צריך לעבוד עם h קטן, אחרת אין שום משמעות לתוצאות, ולא ניתן לטעון שהכוונה היא להגדיל את h ללא חסם. וגם הבעיה עם הטעות הסטוכסטית מופיעה הרבה לפני כל תופעה אחרת.

---

2. המחיר $S(t)$ של נכס מסויים מתנהג לפי המד"ס

$$dS = S(rdt + \sigma dW)$$

כאשר r, σ הם קבועים חיוביים, והזמן t נמדד בשנים, כאשר שנה היא 252 ימים. לחבר שלי יש הרבה מהנכס, ואני רוצה לקנות חלק מאחזקתו. החבר מציע לי חוזה כזה: שבשנה הקורבה, בכל יום שבו מחיר הנכס בשוק הוא מתחת ל-B אני אקנה ממנו יחידה אחת במחיר B (בימים אלה אני מפסיד), ובכל יום שבו מחיר הנכס בשוק הוא מעל B אני אקנה ממנו x יחידות במחיר B (בימים אלה אני מרוויח). x אינו בהכרח שלם.

(א) הסבר למה ערך החוזה (בשבילי) עולה ככל ש-x יותר גדול, אבל יורד ככל ש-B יותר גדול.

(ב) הסבר איך לעשות סימולציה של ערך החוזה. (אין לכתוב פקודות מטלב. יש להסביר במילים עם משוואות רלוונטיות.)

(ג) למה יש קושי בסימולציה אם B הוא גבוה (כלומר B הרבה יותר גדול מהמחיר ההתחלתי $S(0)$) ואיך ניתן להתגבר על בעיה זו על ידי importance sampling ? יש לתת את הנוסחאות הרלוונטיות ליישום ה- importance sampling
.

(א) x הוא הכמות שאני קונה בימים שאני קונה מתחת למחיר השוק. ולכן, ככל ש-x יותר גדול אני מרוויח יותר. מאידך, אני מפסיד כאשר מחיר השוק הוא תחת ל-B, ולכן כאשר B עולה, מחיר השוק יהיה מתחת ל-B יותר, ואני אפסיד יותר.(אני אפסיד גם במחירים שהרווחתי בהם לפני שהורדתי את B, ובמקרים שכבר הפסדתי בהם אני עכשיו אפסיד יותר.) ולכן - הערך של החוזה עולה אם x ויורד עם B.

(ב) על ידי שיטת GBM אפשר לבנות סימולציה של מחירים סופיומיים, $S_0, S_1, \ldots, S_{252}$:

$$S_{i+1} = S_i e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)h + \sigma\sqrt{h}Z_i}$$

כאן $h = \frac{1}{252}$ ו- Z_i הם מספרים אקראיים נורמליים סטנדרטיים בלתי-תלויים. הערך הנוכחי של הרווח מהחוזה הוא

$$P = x\sum_{i=1}^{252} e^{-irh}(S_i - B)_+ - \sum_{i=1}^{252} e^{-irh}(B - S_i)_+$$

עושים M סימולציות למצוא M ערכים של P, ובסוף מוצאים את האומדן למחיר על ידי הערך הממוצע של P, עם טעות מסדר גודל סטיית התקן של הערכים של P חלקי $\sqrt{M}$.

(ג) אם B הוא גבוה, ברוב הסימולציות המחירים ישארו מתחת ל-B, ובכל יום אני "אפסיד". יכול להיות שזה יתן לי רושם נכון של ערך החוזה, אבל אם גם x הוא גבוה, אזי המקרים הנדירים שבהם המחיר כן עולה מעל B הם חשובים ותורמים הרבה לערך החוזה. במקרים כאלה עדיף לדגום יותר את המקרים האלה. ניתן לעשות כן על ידי importance sampling. במקום לקחת את המשתנים המקריים Z_i להיות נורמליים סטנדרטיים, נקח אותם מהתפלגות $N(\mu, 1)$. אזי במקום לחשב את $\mathbf{E}[P]$ יש צורך לחשב את

$$\mathbf{E}\left[Pe^{-\mu\sum Z_i + \frac{1}{2}N\mu^2}\right]$$

כאשר $N = 252$. יש צורך לבחור את μ כך שמקבלים אחוז סביר של דגימות של כל אחד מהתחומים $S > B$ ו- $S < B$.

---

3. כתוב את שיטת Crank-Nicolson לפתרון משוואת החום

$$u_t = \kappa u_{xx}\,, \qquad 0<x<1, t>0,$$

עם תנאי התחלה $u(x,0)=bx(2-x)$ ותנאיי שפה $u(0,t)=0$ ו- $u(1,t)=b$. כאן גם κ וגם b הם קבועים. (יש לכתוב את המשוואות הליניאריות שיש לפתור בכל זמן כדי ליישם את השיטה, אין צורך לפתור את המשוואות.)

איזה שינויים יש לעשות במשוואות במקרה שגם κ וגם b הם פונקציות של הזמן t ותנאי ההתחלה הוא $u(x,0)=b(0)x(2-x)$?

מחלקים את התחום $0<x<1$ ל-N צעדים מגודל $h=\frac{1}{N}$ ואת התחום $0<t<T$ ל-M צעדים מגודל $k=\frac{T}{M}$. כאן T הוא הזמן המקסימלי שמתעניינים בו. כותבים u_{ij}, $0\le i\le N$, $0\le j\le M$, לקירוב ל- $u(ih,jk)$. בהתאם לתנאי השפה נקח

$$u_{0j}=0\,,\quad u_{Nj}=b\,,\quad j=0,\ldots,M$$

ו-

$$u_{i0}=bih(2-ih)\,,\qquad i=0,\ldots,N$$

בהתאם לתנאי ההתחלה. משוואות קרנק-ניקולסון הן המשוואות

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{k}=\frac{\kappa}{2}\left(\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}\right)\,,$$

$$1\le i\le N-1,\ 0\le j\le M-1$$

או

$$(1+2r)u_{i,j+1}-ru_{i+1,j+1}-ru_{i-1,j+1}=(1-2r)u_{ij}+ru_{i+1,j}+ru_{i-1,j}$$

כאשר $r=\frac{k\kappa}{2h^2}$. יש פה שני מקרים "מיוחדים": כאשר $i=1$ מופיעים $u_{0,j}$ ו- $u_{0,j+1}$ שהם מתאפסים לפי תנאי שפה ראשון. כאשר $i=N-1$ מופיעים $u_{N,j}$ ו- $u_{N+1,j}$ ששניהם שווים ל- b לפי תנאי שפה שני.

אם b,κ הם פונקציות של t, נכתוב $b_j=b(jk)$, $\kappa_j=\kappa(jk)$. משוואות קרנק ניקולסון עכשיו הן

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{k}=\frac{1}{2}\left(\kappa_j\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\kappa_{j+1}\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2}\right)\,,$$

או

$$(1+2r_{j+1})u_{i,j+1}-r_{j+1}u_{i+1,j+1}-r_{j+1}u_{i-1,j+1}=(1-2r_j)u_{ij}+r_ju_{i+1,j}+r_ju_{i-1,j}$$

כאשר $r_j=\frac{k\kappa_j}{2h^2}$. במקרה ש- $i=N-1$ מחליפים u_{Nj} ב- b_j (ו- $u_{N,j+1}$ ב- b_{j+1}) לפי תנאי השפה המתוקן.
