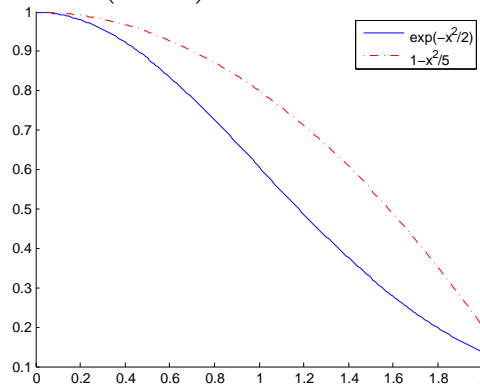


זמן המבחן: 90 דקות.
 מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשבון מדעי.
 יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) באיור למטה מופיעים הגרפים של הפונקציות $e^{-x^2/2}$ ו- $1 - \frac{x^2}{5}$ בקטע $0 < x < 2$. הסבר איך לנצל את העובדה שהגרף הראשון נמצא מתחת לגרף השני לייצר משתנים מקריים עם התפלגות נורמלית סטנדרטית מוגבלת לקטע $[0, 2]$, בהנתן משתנים מקריים עם פונקציית הצפיפות $f(x) = \frac{15}{22} \left(1 - \frac{x^2}{5}\right)$.



(ב) הסבר את השימוש בשיטת אויילר-מרווימה ושיטת מונטה-קרלו למצוא אומדן ל- $E[X(2)]$ כאשר $X(t)$ מקיים את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dX = (2 - X)dt + \sqrt{|X|}dW, \quad X(0) = 1$$

(ג) לאחר ביצוע האמור בסעיף (ב) דלעיל התקבלו התוצאות כדלקמן:

1.8636	1.8511	1.8676	1.8676	1.8561	1.8604	1.8603	1.8706	1.8643	1.8590
0.0093	0.0092	0.0094	0.0094	0.0094	0.0093	0.0093	0.0094	0.0094	0.0094

בכל עמודה המספר העליון הוא האומדן לתוחלת שהתקבל מ-10,000 סימולציות, והמספר התחתון הוא האומדן לטעות הסטוכסטית.

כאשר נעשה שימוש בתהליך דלעיל במספרים אקראיים (נורמליים) מוגבלים לקטע $[-2, 2]$, במקום משתנים נורמליים סטנדרטיים, התקבלו התוצאות כדלקמן:

1.8751	1.8841	1.8738	1.8747	1.8646	1.8651	1.8612	1.8659	1.8672	1.8735
0.0082	0.0084	0.0083	0.0082	0.0082	0.0082	0.0082	0.0082	0.0083	0.0082

האם ישנם שינויים משמעותיים בתוצאות שהתקבלו?
 אם נמצאים שינויים משמעותיים הסבר את הסיבות לשינויים.

2. המחירים של שני נכסים $S_1(t), S_2(t)$ מתנהגים לפי המשוואות

$$\begin{aligned} dS_1 &= S_1 (r dt + \sigma_1 dW_1) \\ dS_2 &= S_2 \left(r dt + \sigma_2 \left(\rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2 \right) \right) \end{aligned}$$

כאשר $r, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ הם קבועים חיוביים ידועים, ו- $S_1(0) = S_2(0) = 1$. אמורים לתמחר אופציית call אירופאית על הנכס הראשון, עם זמן מימוש T ומחיר מימוש K , ותנאי נוסף שהאופציה נפסלת (כלומר, לא משלמת שום תגמול) אם עד לזמן המימוש המחיר של הנכס השני יורד מתחת למחסום B .

- (א) תאר את התהליך הסטנדרטי של תמחור אופציה כזו.
 (ב) במידה ו- B הוא נמוך, והסיכוי לעבור את המחסום הוא נמוך, איך ניתן לשפר את איכות הסימולציה על ידי משתנה בקרה?
 (ג) במידה ו- K הוא גבוה, והסיכוי לקבל תגמול מהאופציה הוא נמוך, איך ניתן לשפר את איכות הסימולציה על ידי שימוש בגשר הברואני?

3. (א) הסבר איך לפתור, על ידי שיטת אויילר, את הבעיה

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < 2$$

עם תנאי התחלה

$$u(x, 0) = \frac{1}{3}x^3$$

ותנאי שפה

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 1$$

- (ב) הסבר, בנוסף, איך ניתן למצוא מתוך הפתרון, גרף של הפונקציה $u_x(x, 2)$.
 (ג) כדי לפתור את הבעיה הדומה בקטע משתנה

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < f(t), 0 < t < 2$$

עם תנאי התחלה

$$u(x, 0) = \frac{1}{3} \frac{x^3}{f(0)^2}$$

ותנאי שפה

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(f(t), t) = 1$$

כאשר $f(t)$ היא פונקציה (חיובית) נתונה, מומלץ לעבור לקואורדינטה חדשה

$$y = \frac{x}{f(t)}$$

מהיא המשוואה הדפרנציאלית החדשה אחרי המעבר לקואורדינטה החדשה?

בהצלחה!