בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית 88-636, פרופ' ג'רמי שיף
מבחן מועד א', סמסטר א', תשע"ו

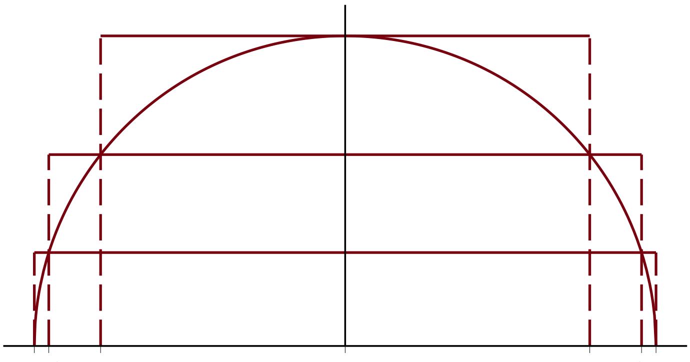
זמן המבחן: 90 דקות.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשבון מדעי.
יש לענות על 3 השאלות. בכל שאלה ניתן לקבל עד 40 נקודות - הסעיף האחרון בכל שאלה הוא בעצם "בונוס".
יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) (8 נקודות) הסבר איך ניתן לייצר מספרים אקראיים מההתפלגות עם פונקציית צפיפות

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,, \qquad -1 < x < 1$$

על ידי שיטת דחייה, החל ממספרים אקראיים מההתפלגות האחידה בקטע $(-1,1)$. איזה אחוז של המספרים נדחים בתהליך זה ?

(ב) (8 נקודות) לשפר את השיטה של הסעיף הקודם מציעים להשתמש בזיגורט עם 3 קומות, כמו שמופיע באיור:



מהם התנאים שיש לדרוש על המספרים a, b כך שזה יהיה זיגורט "חוקי"? אין צורך לפתור את המשוואות שאתה רושם (לשימוש בהמשך - הפתרון הוא $a \approx 0.7868$, $b \approx 0.9535$).

(ג) (9 נקודות) הסבר איך בפועל משתמשים בזיגורט.

(ד) (8 נקודות) נמצא שקצב הדחייה כאשר משתמשים בזיגורט הוא בערך 13%. איך ניתן להסביר את זה? איך יתנהג אחוז הדחייה כאשר משתמשים בזיגורט בעל N קומות? (לשאלה זו יש לתת תשובה עם נימוק קצר - הכוונה היא לניחוש טוב, לא לחישוב פורמלי.)

(ה) (7 נקודות) הצע שיטת אחרת לייצור מספרים אקראיים עם ההתפלגות שניתנה בסעיף (א). רמז (שלא בהכרח צריך להשתמש בו):

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)$$

2. התהליך הסטוכסטי S מקיים את המד"ס

$$dS = S(r\ dt + \sigma\ dW_1)$$

כאשר σ הוא גם תהליך סטוכסטי, המקיים את המד"ס

$$d\sigma = a(b - \sigma)\ dt + c\ dW_2$$

כאן r, a, b, c הם קבועים חיוביים, ו- W_1, W_2 הם תהליכי וינר עם מקדם מתאם ρ ליחידת זמן.

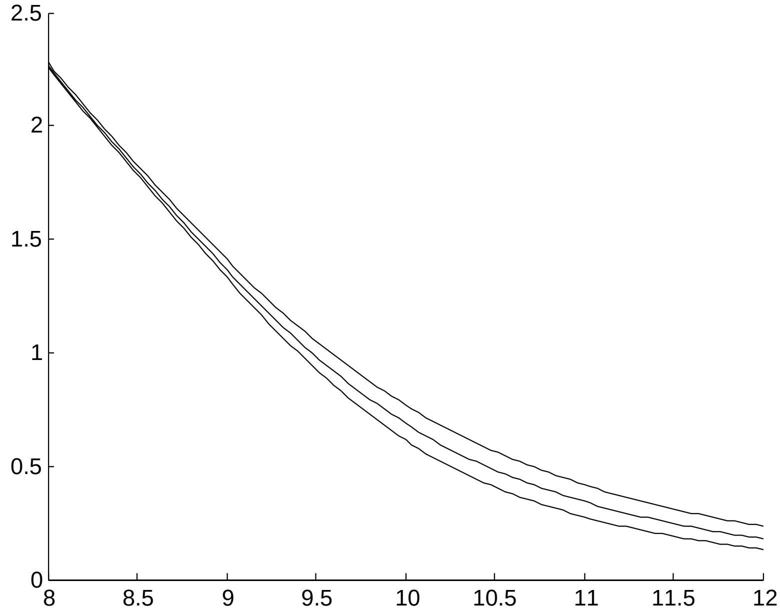
(א) (19 נקודות) הסבר בקצרה איך לקבל אומדן על ידי שיטת מונטה קרלו למחיר ההוגן של אופציית call אירופאי על נכס עם מחיר S, בהנתן הערכים של S ו- σ בזמן 0. יש לסמן את מחיר מימוש האופציה ב-K וזמן פקיעתו ב-T.

(ב) (7 נקודות) סטודנט אחד שכתב קוד לפתור את הבעייה בסעיף (א) מדווח שהוא הריץ את הקוד שלו במקרה $r = 0.03, a = 0.5, c = 1.2, \rho = 0.5, S(0) = 10, \sigma(0) = 0.1, K = 8, T = 1$ וקיבל את התוצאות הבאות:

b	price
0.1	2.2692
0.2	2.2467
0.3	2.2399

והוא מסיק שהמחיר יורד כפונקציה של b. הוא אומר שעשה $10,000$ סימולציות לכל מקרה. האם אתה מסכים אתו? האם יש לך השגות על המסקנה שלו?

(ג) (7 נקודות) המרצה כתב קוד משלו לפתור את הבעייה עם הפרמטרים של סעיף (ב) אבל עכשיו K רץ מ-8 עד 12. הוא קבל את האיור למטה אבל לא זוכר איזו מ-3 העקומות שמופיעות שייכות לאיזה מ-3 הערכים של b. מה דעתך בעניין ?



(ד) (7 נקודות) רואים שהערך של האופציה יורד ככל ש- K יותר גדול. מה ניתן לעשות לשפר את דיוק האומדן במקרה ש-K גדול מאוד?

3. (א) (19 נקודות) הסבר את שיטת אויילר לפתרון הבעיה

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1+u^2} \qquad 0 < x < 2\ ,\ 0 < t < 2$$

עם תנאי התחלה $u(x,0) = \frac{1}{4}x^2$ ותנאיי שפה $u(0,t) = 0$, $u(2,t) = 1$.

(ב) (7 נקודות) כאשר פתרתי את הבעייה בסעיף הקודם עם שיטת אויילר ו-20 צעדים בכיוון x, מצאתי שקבלתי תוצאה טובה כאשר השתמשתי ב-400 צעדים בכיוון t, ותוצאה בכלל לא קרובה לתוצאה האמיתית כאשר השתמשתי ב-350 צעדים בכיוון t. איך ניתן להסביר את זה ?

(ג) (7 נקודות) כאשר עשיתי אותו דבר, אבל עם תנאי התחלה $u(x,0) = 1 + \frac{1}{4}x^2$ ותנאיי שפה $u(0,t) = 1$, $u(2,t) = 2$ מצאתי שהשיטה עובדת טוב אפילו אם אני מוריד את מספר הצעדים בכיוון t ל-150 . איך ניתן להסביר את זה ?

(ד) (7 נקודות) כתוב את המשוואות שיש צורך לפתור אותן בכל צעד בזמן אם רוצים להשתמש בשיטת Crank Nicolson לבעיה זו. נכון או לא נכון: המטריצה שיש להפוך כאשר משתמשים בשיטת ניוטון לפתור משוואות אלה היא תלת-אלכסונית.

בהצלחה!