בס"ד

<u>שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית 88-636, פרופ' ג'רמי שיף</u>
<u>מבחן מועד א', סמסטר א', תשע"ו - עם פתרונות</u>

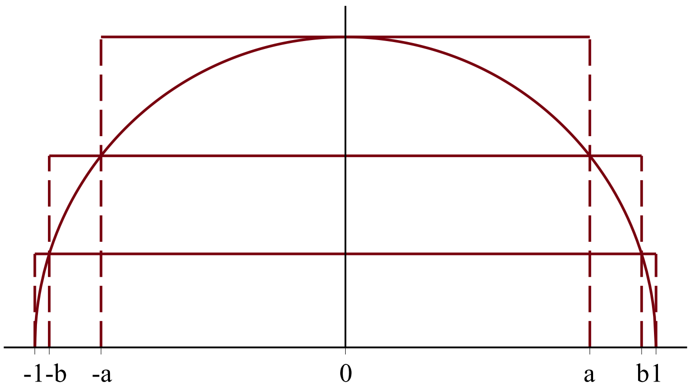
זמן המבחן: 90 דקות.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשבון מדעי.
יש לענות על 3 השאלות. בכל שאלה ניתן לקבל עד 40 נקודות - הסעיף האחרון בכל שאלה הוא בעצם "בונוס".
יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) (8 נקודות) הסבר איך ניתן לייצר מספרים אקראיים מההתפלגות עם פונקציית צפיפות

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,, \qquad -1 < x < 1$$

על ידי שיטת דחייה, החל ממספרים אקראיים מההתפלגות האחידה בקטע $(-1,1)$. איזה אחוז של המספרים נדחים בתהליך זה ?

(ב) (8 נקודות) לשפר את השיטה של הסעיף הקודם מציעים להשתמש בזיגורט עם 3 קומות, כמו שמופיע באיור:



מהם התנאים שיש לדרוש על המספרים a, b כך שזה יהיה זיגורט "חוקי"? אין צורך לפתור את המשוואות שאתה רושם (לשימוש בהמשך - הפתרון הוא $a \approx 0.7868$, $b \approx 0.9535$).

(ג) (9 נקודות) הסבר איך בפועל משתמשים בזיגורט.

(ד) (8 נקודות) נמצא שקצב הדחייה כאשר משתמשים בזיגורט הוא בערך 13%. איך ניתן להסביר את זה? איך יתנהג אחוז הדחייה כאשר משתמשים בזיגורט בעל N קומות? (לשאלה זו יש לתת תשובה עם נימוק קצר - הכוונה היא לניחוש טוב, לא לחישוב פורמלי.)

(ה) (7 נקודות) הצע שיטה אחרת לייצור מספרים אקראיים עם ההתפלגות שניתנה בסעיף (א). רמז (שלא בהכרח צריך להשתמש בו):

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)$$

(א) בוחרים באקראי מספר x בקטע $(-1,1)$. כדי להחליט האם לדחות אותו או לא, יש צורך בעוד מספר אקראי y בקטע $(0, \frac{2}{\pi})$ - ניתן לבנות את זה ממספר אקראי z בקטע $(-1,1)$ על ידי $y = \frac{z+1}{\pi}$. עכשיו מקבלים את x אם

$$y < \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

ודוחים אחרת. בעצם הזוג (x,y) הם הקוואורדינטות של נקודה ב"קופסא" מגובה $\frac{2}{\pi}$ על הקטע $[-1,1]$, ומקבלים את הנקודה אם היא מתחת לאליפסה באיור בסעיף הבא. שטח מתחת לאליפסה: $\frac{1}{2}\pi \cdot 1 \cdot \frac{2}{\pi} = 1$ שטח הקופסא: $2 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}$. ולכן אחוז הדחייה $1 - \frac{\pi}{4} \approx 21.5\%$.

(ב) כל הקומות של הזיגורט חייבים להיות מאותו שטח:

$$2\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-b^2}=2b\cdot\frac{2}{\pi}(\sqrt{1-a^2}-\sqrt{1-b^2})=2a\cdot\frac{2}{\pi}(1-\sqrt{1-a^2})$$

כלומר

$$\sqrt{1-b^2}=b(\sqrt{1-a^2}-\sqrt{1-b^2})=a(1-\sqrt{1-a^2})$$

(ג) בוחרים באקראי אחת הקומות. נגיד שהקומה "רצה" מ- $-s$ עד s. בוחרים באקראי מספר מהתפלגות האחידה בקטע $(-s,s)$. עכשיו צריכים להחליט אם לדחות או אם לקבל. בהנחה שלא בחרנו בקומה העליונה, יש עוד קומה שרצה מ- $-t$ עד t על הקומה בה אנחנו נמצאים. אם $|x|\leq t$ אזי מקבלים את x ללא צורך בשום תנאי נוסף. אם $t<|x|<s$, בוחרים עוד מספר אקראי u מההתפלגות האחידה על $(0,1)$ ובודקים - אם

$$f(s)+u(f(t)-f(s))<f(x)$$

מקבלים, אחרת דוחים.

(ד) זה אומר שכ- 13% של השטח מתחת לזיגורט נמצא מעל העקומה. השטח מתחת לזיגורט הוא פי 3 השטח של קומה אחת, והשטח של הקומה התחתונה הוא $2\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-b^2}$. ולכן אחוז הדחייה אמור להיות

$$1-\frac{1}{\frac{12}{\pi}\sqrt{1-b^2}}\approx 0.131$$

אם עושים זיגורט עם N קומות, N מספר גדול, אחוז השטח מתחת לזיגורט שהוא מעל העקומה יתנהג כמו $\frac{1}{N}$.

(ה) אפשר להשתמש בשיטת הטרנספורמציה, $X=F^{-1}(U)$ כאשר U מתפלג אחיד בקטע $(0,1)$. במקרה שלנו

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}dy=\frac{1}{\pi}\left(x\sqrt{1-x^2}+\text{arcsin}x+\frac{\pi}{2}\right)$$

(עבור $x\in(-1,1)$) ולכן יהיה צורך לפתור משוואה מסובכת למצוא את $F^{-1}(U)$. ניתן לעשות את זה, לדוגמה, על ידי שיטת ניוטון.

---

2. התהליך הסטוכסטי S מקיים את המד"ס

$$dS=S(r\,dt+\sigma\,dW_1)$$

כאשר σ הוא גם תהליך סטוכסטי, המקיים את המד"ס

$$d\sigma=a(b-\sigma)\,dt+c\,dW_2$$

כאן r,a,b,c הם קבועים חיוביים, ו- W_1,W_2 הם תהליכי וינר עם מקדם מתאם ρ ליחידת זמן.

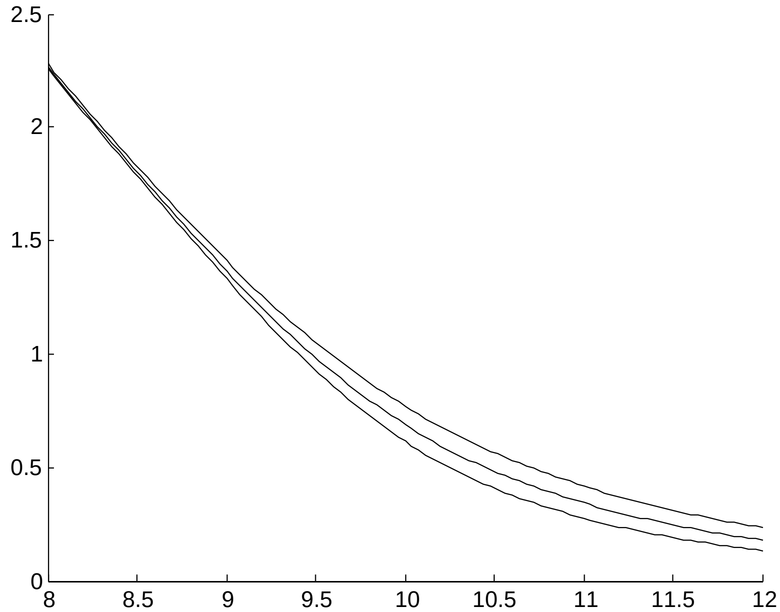
(א) (19 נקודות) הסבר בקצרה איך לקבל אומדן על ידי שיטת מונטה קרלו למחיר ההוגן של אופציית call אירופאי על נכס עם מחיר S, בהנתן הערכים של S ו- σ בזמן 0. יש לסמן את מחיר מימוש האופציה ב-K וזמן פקיעתה ב-T.

(ב) (7 נקודות) סטודנט אחד שכתב קוד לפתור את הבעייה בסעיף (א) מדווח שהוא הריץ את הקוד שלו במקרה $r=0.03,a=0.5,c=1.2,\rho=0.5,S(0)=10,\sigma(0)=0.1,K=8,T=1$ וקיבל את התוצאות הבאות:

b	price
0.1	2.2692
0.2	2.2467
0.3	2.2399

והוא מסיק שהמחיר יורד כפונקציה של b. הוא אומר שעשה $10,000$ סימולציות לכל מקרה. האם אתה מסכים אתו? האם יש לך השגות על המסקנה שלו?

(ג) (7 נקודות) המרצה כתב קוד משלו לפתור את הבעייה עם הפרמטרים של סעיף (ב) אבל עכשיו K רץ מ-8 עד 12. הוא קבל את האיור למטה אבל לא זוכר איזו מ-3 העקומות שמופיעות שייכות לאיזה מ-3 הערכים של b. מה דעתך בעניין ?



(ד) (7 נקודות) רואים שהערך של האופציה יורד ככל ש- K יותר גדול. מה ניתן לעשות לשפר את דיוק האומדן במקרה ש-K גדול מאוד?

(א) יש לעשות סימולציות של מסלולים של התהליכים $S(t), \sigma(t)$. מחלקים את הזמן עד לפקיעה ל-N קטעים בעלי אורך $h = \frac{T}{N}$ ובונים קירובים S_i, σ_i לערכים של התהליכים בזמנים ih $(0 \le i \le N)$. אפשר לעשות כן על ידי שיטת אוילר מרוימה לשני התהליכים

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= S_i(1 + rh + \sigma_i\sqrt{h}Z_{1i}) \\ \sigma_{i+1} &= \sigma_i + ha(b - \sigma_i) + c\sqrt{h}(\rho Z_{1i} + \sqrt{1-\rho^2}Z_{2i}) \end{aligned}$$

כאן Z_{1i}, Z_{2i} הם שני משתנים מקריים נורמלים סטנדרטיים בלתי-תלויים. עדיף להשתמש בנוסחת GBM המדוייקת להתפתחות של S:

$$S_{i+1} = S_i e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)h + \sigma_i\sqrt{h}Z_{1i}}$$

למרות שזה לא "מדוייק" כאן כי σ אינו קבוע.

כדאי להגיד משהו על הבחירה של N.

עושים דיגמה של מספר גדול M של מסלולים. כדי לתת אומדן למחיר האופציה, יש לחשב לכל מסלול את הערך של

$$(S_N - K)_+ e^{-rT}$$

(כאן עשיתי היוון עם שער ריבית r שמופיע במשוואה - יכול להיות שיש להשתמש בשני ערכים שונים של r .) כך מקבלים M דגימות מההתלפות של ערכים אפשריים של האופציה. עכשיו מפעילים שיטת מונטה קרלו - האומדן למחיר יהיה הממוצע של הערכים האלה והאומדן לסדר גודל הטעות יהיה $\frac{s}{\sqrt{M}}$ כאשר s הוא סטיית התקן של המדגם.

(ב) הוא לא נתן אומדנים לטעויות ולכן אי אפשר לדעת. יש צורך גם לשאול אותו האם הוא השתמש במשתנים מקריים משותפים. אם כן, אזי מן הסתם הטעויות באותו כיוון לערכים השונים של b. אבל אם לא - יכול להיות שהטעויות גורמות לתוצאה אחת להיות נמוכה, ועוד אחת להיות גבוהה, וזה מקלקל את המסקנה, כי התוצאות קרובות זו לזו.

(ג) σ מקיים את משוואת Vasicek - חזרה לממוצע, והממוצע הזה הוא b. ולכן כל ש- b יותר גבוה, σ יהיה יותר גבוה, כלומר יש ל-S יותר נדיפות, ומחיר האופציה תעלה. העקומה העליונה שייכת לערך הגדול ביותר של b והנמוכה לערך הקטן ביותר.

(ד) הכוונה שלי כאן היתה להשתמש ב- importance sampling. אם במקום להשתמש במ"מים Z_{1i} שמתפלגים $N(0,1)$ נשתמש במשתנים עם התפלגות $N(\mu,1)$ עבור $\mu > 0$ מתאים, נדגים בתדירות יותר גבוהה את המקרים ה"נדירים" שבהם $S_N > K$ (K גדול). לפצות את השינוי בהתפלגות יש צורך לעשות תוחלת של פונקציה חילופית מתאימה. הבעייה כאן היא שלא רוצים לשנות את ההתפלגות של התהליך הסטוכסטי שמופיע במשוואה ל- σ. ניתן לדאוג לזה על ידי שמשנים את ההתפלגות של Z_{2i} ל- $N(\mu',1)$ כאשר $\rho\mu + \sqrt{1-\rho^2}\mu' = 0$. אבל זה דורש עוד שינוי בפונקציה שבתוחלת.

---

3. (א) (19 נקודות) הסבר את שיטת אויילר לפתרון הבעיה

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1+u^2} \qquad 0 < x < 2\ ,\ 0 < t < 2$$

עם תנאי התחלה $u(x,0) = \frac{1}{4}x^2$ ותנאי שפה $u(0,t) = 0$, $u(2,t) = 1$.

(ב) (7 נקודות) כאשר פתרתי את הבעייה בסעיף הקודם עם שיטת אויילר ו-20 צעדים בכיוון x, מצאתי שקבלתי תוצאה טובה כאשר השתמשתי ב-400 צעדים בכיוון t, ותוצאה בכלל לא קרובה לתוצאה האמיתית כאשר השתמשתי ב-350 צעדים בכיוון t. איך ניתן להסביר את זה ?

(ג) (7 נקודות) כאשר עשיתי אותו דבר, אבל עם תנאי התחלה $u(x,0) = 1 + \frac{1}{4}x^2$ ותנאי שפה $u(0,t) = 1$, $u(2,t) = 2$ מצאתי שהשיטה עובדת טוב אפילו אם אני מוריד את מספר הצעדים בכיוון t ל-150 . איך ניתן להסביר את זה ?

(ד) (7 נקודות) כתוב את המשוואות שיש צורך לפתור אותן בכל צעד בזמן אם רוצים להשתמש בשיטת Crank Nicolson לבעיה זו. נכון או לא נכון: המטריצה שיש להפוך כאשר משתמשים בשיטת ניוטון לפתור משוואות אלה היא תלת-אלכסונית.

(א) כרגיל בשיטות הפרשים סופיים מסתכלים על רשת של נקודות בתחום ההתעניינות. בוחרים את N, מספר הצעדים בכיוון x, ואת M, מספר הצעדים בכיוון t, ומגדירים

$$h = \frac{2}{N}, \quad k = \frac{2}{M}$$

גודלי הצעד בכיוון x ובכיוון t בהתאם. מנסים לבנות קירובים u_{ij} לערכים האמיתיים של הפתרון בנקודות הרשת, $u(ih, jk)$, כאשר $i = 0, \ldots, N$ ו- $j = 0, \ldots, M$. תנאי התחלה נותן את הדרישות

$$u_{i0} = \frac{1}{4}(ih)^2\ , \quad i = 0, \ldots, N$$

ותנאיי השפה נותנים

$$u_{0j} = 0\ , \quad u_{Nj} = 1\ , \quad j = 0, \ldots, M$$

ונשאר לנו לבנות את הקירובים u_{ij} עבור $i = 1, \ldots, N-1$, $j = 1, \ldots, M$. בשיטת אויילר מתרגמים את המשוואה לדרישה

$$u_{i,j+1} = u_{ij} + \frac{k}{h^2}\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{1+u_{ij}^2}$$

ניתן להשתמש בזה באופן רקורסיבי לבנות את ה- u_{ij}, ל- $j = 1$, $j = 2$ וכו'. יש לשים לב שבשיטת אויילר יש בדרך כלל דרישת יציבות מהצורה $k \le Ch^2$ כאשר C הוא קבוע שתלוי במשוואה. למשוואה $u_t = \kappa u_{xx}$ אנחנו יודעים שהתנאי הוא $k \le \frac{h^2}{2\kappa}$. למשוואה שלנו ניתן לנחש שהתנאי יהיה משהו כמו $k \le \frac{h^2(1+U^2)}{2}$ כאשר $U = \min_{x,t} u(x,t)$. בגלל תנאיי השפה שקבלנו, הייתי מנחש ש- $U = 0$ ולכן תנאי היציבות הוא $k \le \frac{h^2}{2}$

(ב) אם לוקחים $N = 20$ אזי $h = \frac{1}{10}$ ויש לדרוש $k \le \frac{1}{200}$ ולכן $M \ge 400$. אזי הניחוש שלנו לתנאי היציבות כנראה עובד טוב. אבל יש לציין שהוא לא מדוייק, כי זה לא בדיוק משוואת החום, ודווקא לא רואים מיד חוסר יציבות כאשר לוקחים $M < 400$, יש צורך להוריד את M קצת יותר. אם $M = 350$ יש בוודאי חוסר יציבות.

(ג) אם משנים את תנאיי השפה כמו שמוצע, יש לקחת עכשיו את $U = 1$, לקבל תנאי יציבות $k \le h^2$. לפי זה הייתי מצפה שאני זקוק לקחת את M לפחות 200. אבל בפעול $M = 150$ גם עובד. שוב - זה לא בדיוק משוואת החום.

(ד) שיטת Crank-Nicolson:

$$u_{i,j+1} = u_{ij} + \frac{k}{2h^2}\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{1 + u_{ij}^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{1 + u_{i,j+1}^2}\right)$$

עכשיו יש צורך בבת-אחת לפתור את $N-1$ המשוואות שמתקבלות עבור j ספציפי ו- $i = 1, \ldots, N-1$. היות ובכל משוואה רק מופיעים שלושה מהנעלמים $u_{*,j+1}$ אכן כאשר פותרים בשיטת ניוטון יהיה צורך להפוך מטריצה תלת-אלכסונית.
