

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית 88-636, פרופ' ג'רמי שיף
 מבחן מועד ב', סמסטר א', תשע"ו

זמן המבחן: 90 דקות.
 מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשבון מדעי.
 יש לענות על 3 השאלות. בכל שאלה ניתן לצבור עד 40 נקודות.
 יש לנמק היטב כל תשובה.

1. התהליכים הסטוכסטיים $I(T), J(T)$ מוגדרים עבור $T \geq 0$ על ידי

$$I(T) = \int_0^T W(t)^2 dt, \quad J(T) = \int_0^T W(t)^2 dW(t)$$

כאשר $W(t)$ הוא תהליך וינר סטנדרטי.

(א) (6 נקודות) הוכח ש-

$$E[I(T)] = \frac{1}{2}T^2, \quad E[J(T)] = 0$$

(ב) (10 נקודות) הוכח ש-

$$\text{Var}(I(T)) = \frac{1}{3}T^4, \quad \text{Var}(J(T)) = T^3$$

תזכורת: אם $Z \sim N(0, 1)$, $E[Z^4] = 3$.

(ג) (12 נקודות) הסבר איך ניתן לעשות סימולציות נומריות של התהליכים $I(T), J(T)$ על הקטע $0 \leq T \leq 1$.

(ד) (12 נקודות) הסבר איך ניתן לקבל אומדנים ל- $E[I(1)], E[J(1)], \text{Var}(I(1)), \text{Var}(J(1))$ על ידי שיטת מונטה קרלו.

2. המחיר $F(t)$ של נכס מקיים את המד"ס

$$dF = \sigma F^\beta dW_1$$

כאשר σ הוא תהליך סטוכסטי המקיים את המד"ס

$$d\sigma = \alpha \sigma dW_2$$

כאן W_1, W_2 הם תהליכים וינר סטנדרטיים עם מקדם מתאם ρ ליחידת זמן, ו- α, β הם קבועים עם $0 < \beta < 1, \alpha > 0$.

(א) (15 נקודות) הסבר איך למצוא אומדן למחיר ההוגן של אופציית put אירופאי על הנכס, עם מחיר מימוש K וזמן מימוש T . יש להניח שידועים את $F(0)$ ואת $\sigma(0)$.

(ב) רציתי לחשב את המחיר של אופצייה כזו בהנתן $\rho = 0.2, \alpha = 0.3, S(0) = 10, \sigma(0) = 0.07, K = 10$, $T = 1$ ו- $0.4 \leq \beta \leq 0.7$. בטבלה מופיעים תוצאות של 4 ניסויים למצוא את המחיר, כל אחד עם $M = 100,000$ סימולציות. בשנים מהם החלוקה של הקטע היתה ל-100 תת-קטעים ($N = 100$), בשנים האחרים ל-200 תת-קטעים ($N = 200$). בכל ניסוי חישבתי את הערך של אופציה עבור 4 ערכים של β עם משתנים מקריים משותפים (אבל המשתנים המקריים ב-4 הניסויים היו שונים זה מזה). נמצא שהאומדן לטעות הסטוכסטית היה תלוי על β אבל לא השתנה בין ניסוי לניסוי.

אומדן טעות סטוכסטית	ניסוי 4 $N = 200$	ניסוי 3 $N = 200$	ניסוי 2 $N = 100$	ניסוי 1 $N = 100$	β
0.0003	0.0705	0.0710	0.0713	0.0701	0.4
0.0004	0.0887	0.0894	0.0898	0.0883	0.5
0.0005	0.1117	0.1125	0.1130	0.1112	0.6
0.0006	0.1406	0.1417	0.1423	0.1400	0.7

i. (14 נקודות) אם $P(\beta)$ מסמן את מחיר האופציה כפונקציה של β , איך ניתן לקבל אומדן ל- $\left. \frac{\partial P}{\partial \beta} \right|_{\beta=0.5}$ מתוך

הערכים של $P(\beta)$ עבור $\beta = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$? מצא את האומדנים ל- $\left. \frac{\partial P}{\partial \beta} \right|_{\beta=0.5}$ שמקבלים מכל אחד מ-4 הניסויים.

ii. (6 נקודות) מהם מקורות הטעות באומדנים שקבלת ל- $\left. \frac{\partial P}{\partial \beta} \right|_{\beta=0.5}$? בפועל מהו מקור הטעות הדומיננטי?

iii. (5 נקודות) נכון או לא נכון: לא ניתן להשתמש במשתנים מקריים משותפים בשני ניסויים, אחד עם $N = 100$, אחד עם $N = 200$.

3. רוצים לפתור את הבעיה

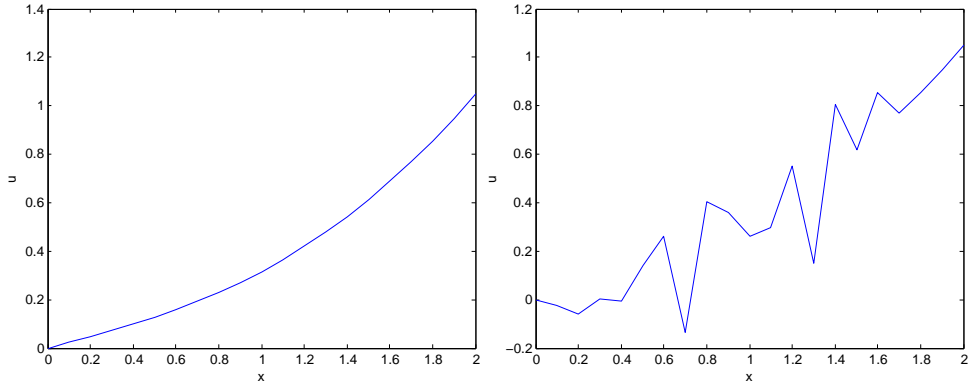
$$u_t = \frac{u_{xx}}{1 + 2u_x^2}, \quad 0 < x < 2, t > 0$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{4}x^2 \text{ ותנאי שפה } u(0, t) = 0, u_x(2, t) = 1$$

(א) (12 נקודות) הסבר איך ניתן לעשות את זה עם שיטת אויילר.

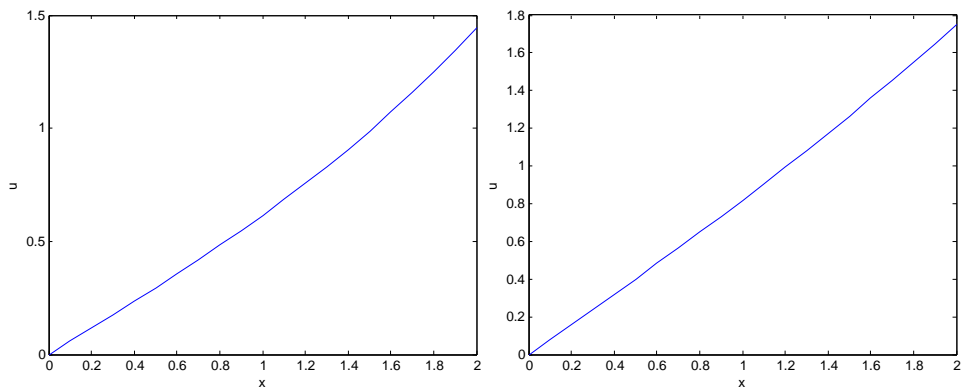
(ב) (15 נקודות) הסבר איך ניתן לעשות את זה עם שיטת Crank-Nicolson. (אין צורך להסביר באופן מפורט איך פותרים מערכת תלת-אלכסונית.)

(ג) (8 נקודות) כאשר הפעלתי את שיטת אויילר, עם 20 צעדים בכיוון x , קבלתי את התוצאות הבאות ל- $u(x, 0.2)$:



התמונה משמאל התקבלה כאשר השתמשתי בצעד $k = \frac{1}{40}$ בכיוון t , והתמונה מימין כאשר השתמשתי ב- $k = \frac{1}{20}$. הסבר!

(ד) (5 נקודות) התוצאות ל- $u(x, 1)$ היו



(שוב לשתי הבחירות של k כמו בסעיף הקודם). הסבר גם את זה!

בהצלחה!