שיטת Box-Muller לייצור מ"מ נורמליים סטנדרטיים:

אם $X, Y$ מ"מים ב"תים אחידים בקטע $[0,1]$ ו-

$$\begin{cases} R = \sqrt{-2\ln X} \\ \theta = 2\pi Y \end{cases} \qquad \begin{cases} U = R\cos\theta \\ V = R\sin\theta \end{cases}$$

אזי $U, V$ מ"מים ב"תים נורמליים סטנדרטיים.

הוכחה: הכלל הרלוונטי: אם לזוג מ"מים $X, Y$ יש צפיפות משותפת $f_{X,Y}$ ו-"עוברים קואורדינטות" (או "מחליפים משתנים") ל-$R, \theta$ (ששניהם פונקציות של $X, Y$ ) אזי הצפיפות החדשה היא $f_{R,\theta} = \frac{f_{X,Y}}{J}$ כאשר

$$. J = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial X} & \frac{\partial \theta}{\partial X} \\ \frac{\partial R}{\partial Y} & \frac{\partial \theta}{\partial Y} \end{pmatrix}\right|$$

כאן יש לעשות שני חילופי משתנים, קודם מ- $X, Y$ ל- $R, \theta$ ואז ל- $U, V$. למעבר הראשון הוגרם $J$ הוא

$$J_1 = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial X} & \frac{\partial \theta}{\partial X} \\ \frac{\partial R}{\partial Y} & \frac{\partial \theta}{\partial Y} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{XR} & 0 \\ 0 & 2\pi \end{pmatrix}\right| = \frac{2\pi}{XR}$$

ולמעבר השני הגורם $J$ הוא

$$J_2 = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial R} & \frac{\partial V}{\partial R} \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} & \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -R\sin\theta & R\cos\theta \end{pmatrix}\right| = R$$

ולכן (היות ו-$X, Y$ הם אחידים ב"תים, כל אחד עם פונקציית צפיפות 1, וצפיפות משותפת שווה לכפל, שהוא גם 1)

$$f_{U,V} = \frac{f_{X,Y}}{J_1 J_2} = \frac{1}{\frac{2\pi}{XR}\cdot R} = \frac{X}{2\pi} = \frac{e^{-\frac{1}{2}R^2}}{2\pi} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(U^2+V^2)}}{2\pi}$$

שזו הצפיפות המשותפת של זוג מ"מים ב"תים נורמליים סטנדרטיים ●