

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. $W_1(t)$ ו- $W_2(t)$ הם 2 תהליכי ווינר בלתי תלויים, ו-

$$A_1(T) = \int_0^T \left(\int_0^t dW_1(s) \right) dW_2(t)$$

$$A_2(T) = \int_0^T \left(\int_0^t dW_2(s) \right) dW_1(t)$$

- (א) על ידי שימוש בלמה של איטו הרב-מימדי לפונקציה $W_1 W_2$ מצא נוסחה מפורשת (ללא אנטגרלים) ל- $A_1(T) + A_2(T)$. מהם התוחלת והשונות של $A_1(T) + A_2(T)$?
(ב) מהי התוחלת והשונות של $A_1(T)$?
(ג) מתוך התוצאות של שני הסעיפים הקודמים, מצא את $\text{cov}(A_1, A_2)$.

2. ברצוני למכור אופציה עם גמול קבוע P אם, עד לזמן המימוש T , נכס הבסיס גם עלה 10% וגם ירד 10% ממחירו הנוכחי (אחרת האופציה היא חסרת ערך). ניתן להניח שמחיר נכס הבסיס מקיים את GBM עם פרמטרים r, s . כתוב תוכנית Matlab לחשב את התוחלת של הרווח מאופציה כזו, בהנתן כל הפרמטרים הרלוונטיים.

3. הסבר, בקצרה, את המושג control variable (מתשנה בקרה). אם מנסים למצוא את $E[X]$ על ידי שיטת מונטה קרלו, בכמה ניתן להוריד את השונות על ידי שימוש ב- control variable Y ? האם העלות של לחשב את $\text{cov}(X, Y)$ כדאית? תן לפחות שתי דוגמאות של שימוש ב- control variables בחישוב מחירי אופציות.

4. (א) מהי נוסחת Feynman-Kac הרב-מימדי ?

(ב) לפי Feynman-Kac, איזה משוואה דפרנציאלית חלקית יש לפתור כדי לקבל את המחיר של אופציה המבוססת על שתי מניות, שהמחירים שלהן, S_1, S_2 , מקיימים את המש-וואות הדפרנציאליות הסטוכסטיות

$$dS_1 = S_1 (r dt + \sigma_1 dW_1)$$

$$dS_2 = S_2 (r dt + \sigma_2 dW_1 + \eta dW_2)$$

כאן $r, \sigma_1, \sigma_2, \eta$ הם קבועים ו- $W_1(t), W_2(t)$ הם תהליכי ווינר בלתי תלויים.
(ג) עבור אופציה שהרווח ממנה בזמן המימוש T הוא

$$\max(S_1(T) - K_1, S_2(T) - K_2)$$

אם גם $S_1(T) > K_1$ וגם $S_2(T) > K_2$ (אחרת אין רווח), מהם תנאי ההתחלה ותנאי השפה הרלוונטיים למשוואה הדפרנציאלית החלקית שכתבת בסעיף הקודם ?

5. (א) מהי שיטת אויילר לפתרון המשוואה הדפרנציאלית החלקית

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad 0 < x, y < 1, \quad t > 0$$

כאשר $u(x, y, t)$ מקיימת את תנאי השפה

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0$$

ותנאי ההתחלה $u(x, y, 0) = f(x, y)$ עם פונקציה ידועה ?

(ב) איך יש לשנות את השיטה אם במקום התנאי $u(0, y, t) = 0$ יש תנאי $u(0, y, t) = g(y)$ כאשר $g(y)$ היא פונקציה נתונה עם $g(0) = g(1) = 0$?

בהצלחה!