

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) אם  $X$  מקיים את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW, \quad X(0) = X_0$$

איזה משוואה מקיים  $Y = X^2$ ?

(ב) כתוב את שיטת אוילר-מרוימה לפתרון המד"ס ל- $X$  ול- $Y$  מסעיף א.

(ג) ניתן לחשב את  $E[X(T)^2] = E[Y(T)]$  או על ידי סימולציה למד"ס ל- $X$  או על ידי סימולציה למד"ס ל- $Y$ . האם סימולציות על ידי שיטת אוילר-מרוימה לשתי המשוואות יתנו את אותן התוצאות? נמק את תשובתך.

2. ברצוני למכור אופצית call המזכה לבעל האופציה לקנות ממני נכס בסיס מסויים במחיר  $K$ , אבל רק אם בזמן המימוש  $T$ , המחיר הממוצע של הנכס ל-5 ימים האחרונים הוא מעל לסף  $L$ . ניתן להניח שמחיר נכס הבסיס מקיים את GBM עם פרמטרים  $r, s$ . כתוב תוכנית Matlab לחשב את התוחלת של הרווח מאופציה זו, בהנתן כל הפרמטרים הרלוונטיים.

3. המחיר  $S(t)$  של נכס מסויים מתנהג לפי

$$dS = S(rdt + sdW)$$

כאשר  $r, s$  הם קבועים ו- $W(t)$  הוא תהליך וינר. רוצים להשוות שתי אסטרטגיות להשקעה לטווח של 5 שנים: הראשונה "buy and hold", לקנות ולמכור רק בסוף התקופה. השנייה לקנות רק אחרי שרואים ירידה של 5% ולמכור כל פעם שרואים עלייה של 15%, ובין מכירה לקנייה שומרים את הכסף בבנק עם שער ריבית  $r$ .

(יותר פירוט על האסטרטגיה השנייה: בהתחלת התקופה קונים רק אחרי שהמחיר או ירד 5% מתחת למחיר הפתיחה, או עלה, ואחרי כן ירד שוב ל-5% מתחת לשיא שהגיע אליו. כמו כן, אם מוכרים באמצע התקופה, לא קונים שוב עד שיש או ירידה של 5% מהמחיר בזמן המכירה, או, אם עלה, עד שירד שוב ל-5% מתחת לשיא שהגיע אליו. מוכרים כל פעם שרואים שהמחיר עלה 15% מעל מחיר הקנייה האחרון.)

(א) הסבר, בקצרה, בלי לכתוב פקודות מחשב, איך היית משווה את שתי האסטרטגיות.

(ב) הסבר איך היית בוחר את הפרמטרים הרלוונטיים, לדוגמה כמה סימולציות יש לעשות.

(ג) מה, לדעתך, תהיה התלות התוצאות על הערכים של  $r$  ו- $s$ ?

4. (א) כתוב את שיטת Crank-Nicolson לפתרון המשוואה הדפרנציאלית החלקית

$$u_t = u_{xx} + cu_x + du \quad 0 < x < 1, t > 0$$

כאשר  $c, d$  הם קבועים, ו- $u(x, t)$  מקיים את תנאי השפה  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  ותנאי ההתחלה  $u(x, 0) = f(x)$ , עם פונקציה ידועה.

(ב) איך יש לשנות את השיטה אם במקום התנאים  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  מקבלים תנאים  $u(1, t) = b(t), u(0, t) = a(t)$  כאשר  $a, b$  הן פונקציות ידועות?

5. בשיטת leapfrog לפתרון משוואת החום  $u_t = u_{xx}$  בונים את הפתרון ב"זמן"  $n + 1$  מתוך הפתרון בשני ה"זמנים"  $n$  ו-  $n - 1$  דרך הנוסחה המפורשת

$$u_{i,n+1} = u_{i,n-1} + \frac{k}{h^2} (u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n})$$

(מומלץ להשוות עם שיטת אויילר). הוכח שלרקורסיה זו יש פתרון בצורה

$$u_{i,n} = \lambda^n e^{\sqrt{-1}i\alpha}$$

עם  $|\lambda| > 1$ . מה זה אומר לגבי היציבות של שיטה זו ?

בהצלחה!