בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית, פרופ' ג'רמי שיף, 88-902-02

מבחן מועד א', סמסטר ב' תשס"ט

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) אם X מקיים את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)dW \ , \qquad X(0) = X_0$$

איזה משוואה מקיים $Y = X^2$?

(ב) כתוב את שיטת אויילר-מרוימה לפתרון המד"סים ל-X ול-Y מסעיף א.

(ג) ניתן לחשב את $\mathbf{E}[X(T)^2] = \mathbf{E}[Y(T)]$ או על ידי סימולציה למד"ס ל-X או על ידי סימולציה למד"ס ל-Y. האם סימולציות על ידי שיטת אויילר-מרוימה לשתי המשוואות יתנו את אותן התוצאות ? נמק את תשובתך.

(א) לפי הלמה של איטו, אם g היא פונקציה של X ו- t,

$$dg = \left(g_t + a g_X + \frac{1}{2}b^2 g_{XX}\right)dt + b g_X dW$$

אם נבחר $g = Y = X^2$ מקבלים

$$dY = \left(2aX + b^2\right)dt + 2bXdW = \left(2a\sqrt{Y} + b^2\right)dt + 2b\sqrt{Y}dW$$

(ב)

$$X_{i+1} = X_i + ha(X_i,t_i) + \sqrt{h}b(X_i,t_i)Z_i$$

$$Y_{i+1} = Y_i + h\left(2a(\sqrt{Y_i},t_i)\sqrt{Y_i} + b(\sqrt{Y_i},t_i)^2\right) + 2\sqrt{hY_i}b(\sqrt{Y_i},t_i)Z_i$$

כרגיל, $h = t_{i+1} - t_i$ מסמן את גודל הצעד בזמן, ו- Z_i הוא משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי.

(ג) לא יתנו את אותן התוצאות, אבל ההפרשים יהיו קטנים, מסדר גודל של h. אם מפעילים שיטת אויילר-מרוימה ל-X מקבלים

$$\begin{aligned}
X_{i+1}^2 &= \left(X_i + ha(X_i,t_i) + \sqrt{h}b(X_i,t_i)Z_i\right)^2 \\
&= X_i^2 + h\left(2a(X_i,t_i)X_i + b(X_i,t_i)^2 Z_i^2\right) \\
&\quad + 2\sqrt{h}X_i b(X_i,t_i)Z_i + 2h^{3/2}a(X_i,t_i)b(X_i,t_i)Z_i + h^2 a(X_i,t_i)^2
\end{aligned}$$

יש להשוות מול שיטת א-מ ל-Y - יש איברים מסדר גודל של $h^{3/2}$ ו- h^2 שלא מופיעים שם, וגם איבר Z_i^2 שלא מופיע שם.

---

2. ברצוני למכור אופצית call המזכה לבעל האופציה לקנות ממני נכס בסיס מסויים במחיר K, אבל רק אם בזמן המימוש T, המחיר הממוצע של הנכס ל-5 ימים האחרונים הוא מעל לסף L. ניתן להניח שמחיר נכס הבסיס מקיים את GBM עם פרמטרים r, s. כתוב תוכנית Matlab לחשב את התוחלת של הרווח מאופציה זו, בהנתן כל הפרמטרים הרלוונטיים.

```
function z=optprice(r,s,K,L,T,S0,M)
% r,s parameters of GBM - time unit is 1 day!
% K,L paramerets of the option
% T  number of days to expiration
% S0 initial price of asset
% M number of Monte Carlo simulations
Z=randn(M,T);          % random numbers
S=zeros(M,T+1);          % daily prices - each row a simulation
S(:,1)=S0*ones(M,1);     % initial price in each row
for i=1:T
  S(:,i+1)=S(:,i).*exp( (r-s^2/2) + s*Z(:,i) ) ;
end
% option profit is price - K so long as price is bigger than K
%                  and other condition is met:
P= exp(-r*T)*(S(:,T+1)-K).*(S(:,T+1)>K).*...
   (S(:,T-3)+S(:,T-2)+S(:,T-1)+S(:,T)+S(:,T+1)>5*L);
% return average value, std of value, error in estimate of average
z=[mean(P)  std(P)  std(P)/sqrt(M)] ;
```

---

3. המחיר $S(t)$ של נכס מסויים מתנהג לפי

$$dS = S(rdt + sdW)$$

כאשר r, s הם קבועים ו- $W(t)$ הוא תהליך וינר. רוצים להשוות שתי אסטרטגיות להשקעה לטווח של 5 שנים: הראשונה "buy and hold", לקנות ולמכור רק בסוף התקופה. השנית לקנות רק אחרי שרואים ירידה של 5% ולמכור כל פעם שרואים עלייה של 15%, ובין מכירה לקנייה שומרים את הכסף בבנק עם שער ריבית r.
(יותר פירוט על האסטרטגיה השנייה: בהתחלת התקופה קונים רק אחרי שהמחיר או ירד 5% מתחת למחיר הפתיחה, או עלה, ואחרי כן ירד שוב ל-5% מתחת לשיא שהגיע אליו. כמו כן, אם מוכרים באמצע התקופה, לא קונים שוב עד שיש או ירידה של 5% מהמחיר בזמן המכירה, או, אם עלה, עד שירד שוב ל-5% מתחת לשיא שהגיע אליו. מוכרים כל פעם שרואים שהמחיר עלה 15% מעל מחיר הקנייה האחרון.)

(א) הסבר, בקצרה, בלי לכתוב פקודות מחשב, איך היית משווה את שתי האסטרטגיות.

(ב) הסבר איך היית בוחר את הפרמטרים הרלוונטים, לדוגמה כמה סימולציות יש לעשות.

(ג) מה, לדעתך, תהיה התלות התוצאות על הערכים של r ו- s ?

(א) כמו בשאלה 2, הייתי עושה M סימולציות של מחירי הנכס. בכל סימולציה הייתי מחלק את תקופת 5 השנים ל-N תת-תקופות, ומקבל מחירים בכל תת-תקופה. התוחלת של הרווח של האסטרטגיה הראשונה היא e^{5r}. הייתי מקבל את התוחלת של הרווח של האסטרטגיה השנייה מתוך מטריצת המחירים - פשוט לכל סימולציה מחשב את הרווח באותה סימולציה ובסוף עושה ממוצע. בפועל הייתי מעדיף גם לחשב את התוחלת של הרווח מהאסטרטגיה הראשונה מתוך מטריצת המחירים - זה הכלל של common random numbers - אם רוצים להשוות בין שני דברים קרובים, עדיף לייצר אותם מאותה סימולציה. היות ואנחנו משווים שני דברים קרובים, יש צורך גם לקבל אומדנים לסטיות התקן של הרווחים, כדי לתת אומדן לטעויות באומדנים של תוחלות הרווחים.

(ב) אם לא לוקחים את N להיות מספיק גדול, אזי מן הסתם באסטרטגיה השנייה נפספס הזדמנויות קנייה ומכירה, וזה יגרום לטעות ברווח (לא ברור לי סימן הטעות). כל ש-s הוא יותר גדול, N צריך להיות גדול, כדי שהסימולציה תתאר באופן מדוייק את התנודות במחיר. התנודה במחיר בכל תת-קטע הוא מסדר גודל של $s\sqrt{\frac{5}{N}}$ וזה צריך להיות קטן ביחס ל- 0.05, התנודה שגורמת לקנייה באסטרטגיה 2.

גם M צריך להיות מספיק גדול, כך שהטעות הסטוכסטית בסימולציות תהיה מספיק קטנה, וכדי שנוכל להחליט באופן ברור בין שתי האסטרטגיות. זה יכול להיות בעייה של ממש, בגלל שבהרבה מקרים הרווחים יהיו דומים (ראה סעיף הבא). כמו כן, כל ש- s יותר גדול סטיית התקן תעלה, ויהיה צורך ל- M עוד יותר גדול.

(ג) אם s הוא מאוד קטן, אזי לא תהיינה תנודות חזקות במחיר הנכס, ואי פעם לא נגיע לתנאי של קנייה. הכסף יישאר בבנק, ושתי האסטרטגיות יתנו את אותה רווח (בתוחלת). לאסטרטגיה השנייה יש רק סיכוי להרויח כאשר s הוא גבוה. אם המחיר באופן כללי עולה, אזי בחלק של המקרים נתפוס את העליות ונפספס את הירידות. אבל מצד שני יש גם אפשרות שמחיר הנכס כל הזמן יעלה, ולא נקנה בגלל שאין ירידות, או שהמחיר כל הזמן ירד ולא נמכור בגלל שלא ראינו עליה. ולכן קשה לדון בלי מספרים על ההצלחה של האסטרטגיה. מן הסתם יש למדוד את גודל s מול r, אבל גם יכול להיות שיהיה ל- r השפעה נפרדת.

---

4. (א) כתוב את שיטת Crank-Nicolson לפתרון המשוואה הדפרנציאלית החלקית

$$u_t = u_{xx} + cu_x + du \qquad 0 < x < 1 \ , t > 0$$

כאשר c, d הם קבועים, ו- $u(x,t)$ מקיים את תנאיי השפה $u(0,t) = u(1,t) = 0$ ותנאי ההתחלה $u(x,0) = f(x)$, עם f פונקציה ידועה.

(ב) איך יש לשנות את השיטה אם במקום התנאים $u(0,t) = u(1,t) = 0$ מקבלים תנאים $u(0,t) = a(t)$, $u(1,t) = b(t)$ כאשר a, b הן פונקציות ידועות ?

(א) כרגיל נכתוב $u_{i,n}$ לקירוב ל- $u(ih,nk)$. כאן h הוא אורך צעד בכיוון x, $h=\frac{1}{N}$, ו- k הוא אורך צעד בכיוון t. האינדקס i מקבל ערכים מ-0 עד N, והאינדקס n מקבל ערכים מ-0 ומעלה. לפי תנאיי השפה

$$u_{0,n}=u_{N,n}=0$$

ולפי תנאי ההתחלה

$$u_{i,0}=f(ih)$$

שיטת Crank-Nicolson היא שלכל i בין 1 ו- $N-1$ (כולל), ולכל $n\geq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{u_{i,n+1}-u_{i,n}}{k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1,n}-2u_{i,n}+u_{i-1,n}}{h^2}+c\frac{u_{i+1,n}-u_{i-1,n}}{2h}+du_{i,n}\right.\\ &\quad\left.+\frac{u_{i+1,n+1}-2u_{i,n+1}+u_{i-1,n+1}}{h^2}+c\frac{u_{i+1,n+1}-u_{i-1,n+1}}{2h}+du_{i,n+1}\right)\end{aligned}$$

ניתן לכתוב את זה בצורה היותר קומפקטית

$$\begin{aligned}&(-\alpha-\beta)u_{i+1,n+1}+\left(1+2\alpha-\frac{1}{2}kd\right)u_{i,n+1}+(-\alpha+\beta)u_{i-1,n+1}\\ =\ &(\alpha+\beta)u_{i+1,n+1}+\left(1-2\alpha+\frac{1}{2}kd\right)u_{i,n+1}+(\alpha-\beta)u_{i-1,n+1} \qquad (*)\end{aligned}$$

כאשר

$$\alpha=\frac{k}{2h^2}\ , \qquad \beta=\frac{ck}{4h}$$

זו מערכת תלת-אלכסונית שממנה ניתן למצוא את הערכים של u בזמן $n+1$ בהנתן הערכים של u בזמן n.

(ב) תוספת תנאיי שפה לא טריביאליים גורמת לנו לקבוע ש-

$$u_{0,n}=a(nk)\ , \qquad u_{N,n}=b(nk)$$

אין שום שינוי בשאר המשוואות, אבל התוכן של משוואה (*) משתנה בזה שכאשר $i=1$ או $i=N-1$ מופיעים איברים התלויים על $u_{0,n}$ ו- $u_{N,n}$ (בהתאם). ולכן, אם בסעיף א. יכולנו לכתוב את (*) בצורה

$$A\mathbf{u}_{n+1}=B\mathbf{u_n}$$

כאשר

$$\mathbf{u}_n=\begin{pmatrix}u_{1,n}\\ u_{2,n}\\ \vdots\\ u_{N-1,n}\end{pmatrix}$$

ו- A,B הן מטריצות תלת-אלכסוניות מתאימות, עכשיו (*) מקבלת את הצורה

$$A\mathbf{u}_{n+1}=B\mathbf{u}_n+\mathbf{f}_n$$

כאשר $\mathbf{f}_n$ הוא ווקטור מתאים, אם רכיבים שכולם 0 למעט ראשון ואחרון, שבהם מופיעים תנאיי השפה.

---

5. בשיטת leapfrog לפתרון משוואת החום $u_t = u_{xx}$ בונים את הפתרון ב"זמן" $n+1$ מתוך הפתרון בשני ה"זמנים" n ו- $n-1$ דרך הנוסחה המפורשת

$$u_{i,n+1} = u_{i,n-1} + \frac{k}{h^2}\left(u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}\right)$$

(מומלץ להשוות עם שיטת אויילר). הוכח שלרקורסיה זו יש פתרון בצורה

$$u_{i,n} = \lambda^n e^{\sqrt{-1}i\alpha}$$

עם $|\lambda| > 1$. מה זה אומר לגבי היציבות של שיטה זו ?

בשיטת Von Neumann לבדיקת יציבות, מחפשים פתרון של שיטה נומרית בצורה $u_{i,n} = \lambda^n e^{\sqrt{-1}i\alpha}$ (בלי התייחסות לתנאי שפה והתחלה), ואם אין פתרון כזה עם $|\lambda| > 1$ אומרים שיש יציבות. במקרה שלנו יש פתרון כזה אם

$$\begin{aligned}
& \lambda^{n+1}e^{\sqrt{-1}i\alpha} = \lambda^{n-1}e^{\sqrt{-1}i\alpha} + \frac{k}{h^2}\left(\lambda^n e^{\sqrt{-1}(i+1)\alpha} - 2\lambda^n e^{\sqrt{-1}i\alpha} + \lambda^n e^{\sqrt{-1}(i-1)\alpha}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda^2 = 1 + \frac{k}{h^2}\lambda\left(e^{\sqrt{-1}\alpha} - 2 + e^{-\sqrt{-1}\alpha}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda^2 = 1 + \frac{k}{h^2}\lambda\left(2\cos\alpha - 2\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda^2 + \frac{4k}{h^2}\lambda\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda = \frac{-\frac{4k}{h^2}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{16k^2}{h^4}\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 4}}{2} = -\frac{2k}{h^2}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{4k^2}{h^4}\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1}
\end{aligned}$$

אם לוקחים את סימן ה$-$, מקבלים $\lambda < -1$, כלומר $|\lambda| > 1$. לכן פי כלל היציבות של Von Neumann שיטה זו אינה יציבה.
