

זמן המבחן: שעתיים וחצי.
 מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
 ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. אם $W(t)$ הוא תהליך ווינר סטנדרטי

(א) הוכח ש-

$$\int_t^{t+h} \left(\int_t^s \left(\int_t^u dW(v) \right) dW(u) \right) dW(s) = \frac{1}{6}(W(t+h)-W(t))^3 - \frac{h}{2}(W(t+h)-W(t))$$

(ב) מצא את תוחלות ואת השונות של

$$\int_t^{t+h} \left(\int_t^s \left(\int_t^u dW(v) \right) dW(u) \right) dW(s)$$

2. כתוב תוכנית Matlab לחשב את $E[S(T)]$ כאשר $S(t)$ מקיים את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$\begin{aligned} dS &= S(rdt + \sigma dW_1) \\ d\sigma &= -(\sigma - \zeta)dt + \alpha\sigma dW_2 \end{aligned}$$

כאן גם $S(t)$ וגם $\sigma(t)$ הם משתנים סטוכסטיים, ו- r, ζ, α הם קבועים ידועים. $W_1(t), W_2(t)$ הם תהליכי ווינר בלתי-תלויים. יש להניח שגם $S(0)$ ו- $\sigma(0)$ הם נתונים.

3. הסבר, בקצרה, מה זה הגשר הבראוני (the Brownian bridge), ואת החשיבות של שיטה זו בחישוב מחירי אופציות שהגמול שלהן תלוי על המחיר המקסימלי של נכס משך תקופה מסויימת (כולל אופציות עם מחסום). אם המשתנה הסטוכסטי $S(t)$ מקיים את המשוואה

$$dS = S(rdt + \sigma dW)$$

כשאר r, σ קבועים ו- $W(t)$ תהליך ווינר, ויודעים את $S(t_1)$ ואת $S(t_2)$ עבור $t_1 < t_2$, ואין בינתיים ערכים של $S(t)$ עבור $t_1 < t < t_2$, איך משתמשים בגשר הבראוני לבנות ערכים כאלה?

4. מה הם היתרונות והחסרונות של שיטת אוילר לפתרון משוואות דפרנציאליות חלקיות פרבוליות ומה הם היתרונות והחסרונות של שיטת Crank-Nicolson? יש להתייחס לחלק של התוצאות שקבלתם בתרגילים 4 ו-5 כדי להשוות בין השיטות.

5. כתוב את שיטת אויילר לפתרון הבעייה

$$u_t = u_{xx} + b(t)u_x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

עם תנאי התחלה

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ותנאי שפה

$$u(0, t) = a, \quad u(1, t) = 0, \quad u_x(1, t) = -b(t)$$

כאן a הוא קבוע חיובי, $f(x)$ היא פונקציה נתונה, עם $f(0) = a$, $f(1) = 0$, ו- $b(t)$ היא פונקציה לא ידועה שיש למצוא. איך מוצאים את $b(t)$ בשיטת אויילר?

בהצלחה!