

1. $X(t)$ הוא תהליך איטו המקיים את המשוואה $dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW$, ו- $f(X, t)$

ו- $g(X, t)$ הן שתי פונקציות של X ו- t . האם קיים חוק לייבניץ

$$d(fg) = fdg + gdf \quad ?$$

אם לא, מצא את החוק המתאים לנגזרת של כפל. מצא גם נוסחה דומה לנגזרת של כפל של שלוש פונקציות או יותר, והעזר בנוסחה שמצאת למצוא את $d(W^n)$, $n = 2, 3, 4, \dots$.

2. העזר בלמה של איטו למצוא את האינטגרל

$$\int_0^t W(s)^n dW(s), \quad n = 1, 2, \dots$$

העזר בתוצאה למצוא קשר בין $E[W(t)^{n+1}]$ ו- $E[W(t)^{n-1}]$. העזר בקשר זה למצוא את $E[W(t)^4]$ ואת $E[W(t)^6]$. (ולמי שרוצה - גם את $E[W(t)^{2n}]$ לכל $n = 1, 2, 3, \dots$)

3. הוכחנו בשיעור שהפתרון של המשוואה

$$\frac{dS}{S} = rdt + sdW(t)$$

הוא

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}s^2\right)t + sW(t)\right)$$

כלומר, $S(t) = S(0)e^X$, כאשר X מתפלג נורמלית עם תוחלת $(r - \frac{1}{2}s^2)t$ ושונות s^2t . מצא את התוחלת ואת השונות של $S(t)$. (ההתפלגות של $S(t)$ נקראת התפלגות "לוגנורמלית"). אם התוחלת של $S(t)$ היא μ , מצא את ההסתברות ש- $S(t) \geq \mu$.

4. למשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dX = X(1 - X)dt + \sigma dW$$

כאשר σ הוא קבוע בין 0.1 ל-0.6, מצא אומדן להסתברות שמסלול $X(t)$ המתחיל ב- $X(0) = 0.5$ יתבדר לפני $t = 10$. ניתן לקבוע שמסלול התבדר אם מתי שהוא הערך של $|X|$ עולה על 10. יש למצוא את ההסתברות עבור ערכים שונים של σ (מומלץ לעשות גרף כפונקציה של σ).

5. השתמש בשיטת אויילר-מרוימה ושיטת מונטה-קרלו למצוא את $E[X(2)]$, כאשר $X(t)$ פותר את המשוואה הדפרנציאלית הסטוכסטית

$$dX = \alpha(a - X)dt + s\sqrt{X}dW$$

עם

$$a = 5, \quad \alpha = 1, \quad s = 0.3, \quad X(0) = 1.$$

יש להתשמש ב- $h = 0.1$, עם דגימה של 10,000 מסלולים, ולתת אומדן לטעות הסטוכסטית. חזור על הניסוי עם ערכים שונים של h בין 0.1 ו-0.3 ועם לפחות 100,000 מסלולים בכל ניסוי (כך שהטעות הסטוכסטית היא קטנה ביחס לטעות הדטרמיניסטית). מצא את התלות של השגיאה על h .

6. חברה שלך חושבת שבחמש השנים הקרובות המחיר של מנייה מסויימת יעלה בממוצע 15% בשנה, פלוס-מינוס 10%. הריבית בשוק עומדת על 5%. היא מציעה מדיניות השקעה כזו: לקנות את המניות עכשיו, ואם במשך 5 השנים הקרובות יעלה המחיר ב- 75%, אז למכור ולהשקיע את הכסף בבנק. אם לא יושג היעד של 75% תוך חמש שנים, למכור בסוף התקופה.

על ידי ההנחה שמחיר המנייה מקיימת את המשוואה

$$\frac{dS}{S} = 0.15dt + 0.1dW(t)$$

וסכום כסף M המושקע בבנק לתקופה של T שנים יגדל ל- $Me^{0.05T}$, מצא (על ידי סימולציה) את התוחלת ואת סטיית התקן של הרווח מההשקעה. השווה מול התוחלת וסטיית התקן של הרווח עם משקיעים לתקופה של חמש שנים (יש להשתמש בנוסחאות של שאלה 3).

מה אתה מציע להגיד לחברה? האם אתה יכול לחשוב על מדיניות יותר "טובה"?

בהצלחה!