Question 3

באופן כללי, עבור מ"מ נורמלי:

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

חישוב התוחלת של $S(t)$

ובאופן כללי, עבור $g(x)$:

$g(x) = S(0)\, e^{x}$

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF_x = S(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{x} f(x)\, dx$$

$$= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + x}\, dx =$$

$$= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x^2 - 2\mu x + \mu^2) + 2\sigma^2 x}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x^2 - 2\mu x - 2\sigma^2 x + \mu^2)}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-[[x-(\mu+\sigma^2)]^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4]}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-[x-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2} + \frac{2\mu+\sigma^2}{2}}\, dx =$$

$$= S_0 \cdot e^{\frac{2\mu+\sigma^2}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-[x-(\mu+\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}\, dx}_{=1} =$$

אינטגרל מ- $-\infty$ עד ∞ של פונ' צפיפות של מ"מ נורמלי עם תוחלת $\mu+\sigma^2$ ושונות σ^2

$$= S_0 \cdot e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

ולכן נציב $\mu = (r - \frac{1}{2}s^2)t$ ו- $\sigma^2 = s^2 t$ ונקבל:

$$E[S(t)] = S_0 \cdot e^{(r-\frac{1}{2}s^2)t + \frac{s^2 t}{2}} = S_0 e^{rt}$$

חישוב השונות של $S(t)$:

כזכור, באופן כללי:

$$g(x) = S_0 e^{x}$$

וכן, באופן כללי:

$$V[g(x)] = E[g(x)]^2 - E^2[g(x)]$$

נחשב את: $E[g(x)]^2$

$$E[g(x)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x)]^2 f(x)\, dx =$$

$$= S_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \frac{S_0^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2 + 4\sigma^2 x}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{S_0^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x^2 - 2\mu x + \mu^2 - 4\sigma^2 x)}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{S_0^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-[(x-(\mu+2\sigma^2))^2 - 4\sigma^2\mu - 4\sigma^4]}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= S_0^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-[x-(\mu+2\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}\, dx}_{=1} \cdot e^{2\mu + 2\sigma^2} = e^{2(\mu+\sigma^2)} S_0^2$$

כאן נציב $\mu = (r - \frac{1}{2}s^2)t$ ו- $\sigma^2 = s^2 t$ נקבל

$$E(g(x))^2 = S_0^2 e^{2[(r-\frac{1}{2}s^2)t + s^2 t]} = S_0^2 e^{2rt - s^2 t + 2s^2 t} = S_0^2 e^{2rt + s^2 t} =$$

$$= S_0^2 e^{2(r+\frac{1}{2}s^2)t}$$

$$V[g(x)] = E[g(x)]^2 - E^2[g(x)] = [e^{2rt + s^2 t} - (e^{rt})^2] S_0^2 =$$

$$S_0^2 e^{2rt} [e^{s^2 t} - 1]$$

חישוב: $P(S_t \le \mu)$

$$P(S_t \le \mu) = P(S_0 e^x \le \mu) = P[\ln(S_0 e^x) \le \ln \mu] =$$

$S_0 > 0$ וכן $e^x \geq 0$
וכן $\mu \geq 0$, כיוון שהנו
תוחלת של משהו שתמיד חיובי.
מכיוון ש- $\ln x$ היא פונקציה
עולה כאשר $x>0$, סימן אי
השוויון נשמר.

$$= P((\ln S_0 + x) \le \ln \mu) = P(x \le \ln \mu - \ln S_0) =$$

$$= P\left[x \le \ln\left(\frac{\mu}{S_0}\right)\right] = P\left[\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \le \frac{\ln\left(\frac{\mu}{S_0}\right) - \mu_x}{\sigma_x}\right] =$$

$$= \Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{\mu}{S_0}\right) - \mu_x}{\sigma_x}\right]$$