בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית 88-636

תרגילים 3 - תהליכים רב מימדיים, הורדת שונות וכו'

1. מחירי שתי מניות, $S_1(t), S_2(t)$ מקיימים את המשוואות הדיפרנציאליות הסטוכסטיות

$$\begin{aligned} dS_1 &= S_1(r_1\ dt + s_1\ dW_1) \\ dS_2 &= S_2(r_2\ dt + s_2\ dW_2) \end{aligned}$$

כאשר $r_1 = r_2 = s_1 = 0.0001$, $s_2 = 0.0002$, $W_1(t), W_2(t)$ הם תהליכי ווינר עם קו-ווריאנס ρt ($-1 \le \rho \le 1$) ו- $S_1(0) = S_2(0) = 1$. יחידת הזמן הוא יום אחד.

(א) משקיע אשר קנה יחידה אחת של המנייה הראשונה בזמן $t = 0$ רוצה לרכוש פוליסת ביטוח שתאפשר לו, אם הוא ירצה, להמיר, בזמן $t = 100$, את המנייה שיש לו ביחידה אחת של המנייה השנייה. מחיר סביר לפוליסת כזו הוא

$$\mathbf{E}[\max(S_2(100) - S_1(100), 0)]$$

(כי אם $S_2(100) > S_1(100)$ העלות של ההמרה היא $S_2(100) - S_1(100)$, ואם $S_2(100) < S_1(100)$ מן הסתם לא ירצה להמיר.) העזר בפתרון האנליטי של GBM ובשיטת מונטה-קרלו למצוא אומדן למחיר, כפונקציה של ρ.

(ב) באופציית call על שתי המניות הנ"ל, אם בזמן המימוש $t = 100$ המחיר של המניה הראשונה $S_1(100)$ הוא מעל K_1 והמחיר של השניה $S_2(100)$ הוא מעל K_2, אזי המשקיע מרוויח

$$\max(S_1(100) - K_1, S_2(100) - K_2)\,.$$

כתוב פונקציה ב- Matlab לחשב את התוחלת של הרווח מהאופציה, בהנתן K_1, K_2, ρ. העזר בפונקציה לבדוק את התלות של הרווח ב- ρ בשלושת המקרים

i. $K_1, K_2 > 1$

ii. $K_1 > 1$, $K_2 < 1$

iii. $K_1, K_2 < 1$

2. המחיר $S(t)$ של מנייה מסויימת מקיים את המשוואה $dS = S(rdt + sdW)$ כאשר $r = 0.1$, $s = 0.4$, $S(0) = 1$. יחידת הזמן היא שנה, שהיא שווה ל- 252 יום.

אופציית "מקס" על המנייה היא חוזה המשלמת את הסכום $(\overline{S} - K)_+$ בזמן T, כאשר

$$\overline{S} = \max_{0 \le t \le T} S(t)$$

רוצים למצוא גם את המחיר V של אופציית "מקס" עם $T = \frac{60}{252}$ ו- $K = 1.1$ וגם את הרגישות שלה למחיר ההתחלתי ולנדיפות $\frac{\partial V}{\partial S(0)}$ ו- $\frac{\partial V}{\partial s}$.

(א) מצא את V על ידי סימולציית מונטה-קרלו, כאשר מודדים את מחיר המניה פעמיים בכל יום.

(ב) מצא את V על ידי סימולציית מונטה-קרלו, כאשר מודדים את מחיר המניה עשר פעמים בכל יום. מה יקרה אם נמדוד יותר פעמים בכל יום ?

(ג) מצא את $\frac{\partial V}{\partial S(0)}$ על ידי חזרה של הסימולציה מסעיף ב' עם $S(0) = 1 \pm \epsilon$ ועם "משתנים מקריים משותפים". איזה השפעה יש לערך של ϵ על התוצאה ?

(ד) מצא בשיטה דומה את $\frac{\partial V}{\partial s}$

3. (א) לאופציה המתוארת בשאלה 2, מצא (על ידי סימולציה) את ההסתברות שהאופציה נותנת תגמול חיובי כפונקציה של K.

(ב) למה במקרה ש- K גדול ניתן להוריד את השונות של החישוב של ערך האופציה על ידי שעושים סימולציה עם מספרים אקראיים עם התפלגות $N(\mu,1)$ כאשר $\mu > 0$ במקום משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים ?

(ג) במקרה ש- $K = 1.4$ מצא את השונות של החישוב כפונקציה של μ, ומצא את הערך של μ אשר נותן את השונות הנמוכה ביותר.

(ד) האם שיטה זו של הורדת שונות גם טובה לחישוב של ה- Δ של האופציה? (הרגישות ל- $S(0)$, כמו שחישבתם בשאלה הקודמת.)

4. אופציה אסיאתית, עם זמן מימוש T ומחיר מימוש K, על מנייה בשאלה 2, היא חוזה המשלמת את הסכום $(\overline{S} - K)_+$ בזמן T, כאשר $\overline{S}$ מסמן את המחיר הממוצע (האריתמטי) של המנייה בסוף 10 ימי המסחר האחרונים בתקופה T.

חשב מחיר לאופציה כזו עם $T = \frac{60}{252}$ ו- $K = 1.1$

(א) על ידי סמולצית מונטה קרלו רגילה (ושימוש בפתרון האנליטי של GBM)

(ב) על ידי שימוש במחיר הידוע של אופצית call רגילה עם זמן מימוש T כמשתנה בקרה.

(ג) על ידי שימוש במחיר הידוע של אופצית call רגילה עם זמן מימוש $T - \frac{5}{252}$ כמשתנה בקרה.

מה היא השיטה היעילה ביותר ?

בהצלחה!