בס"ד

שיטות נומריות למתמטיקה פיננסית 88-636

תרגילים 4 – משוואות דפרנציאליות חלקיות

1. (א) הוכח באמצעות פיתוחי טיילור מתאימים שעבור כל בחירה של הקבוע $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ הביטוי

$$\frac{\alpha f(x+2h)+f(x+h)-(1+\alpha)f(x)}{(1+2\alpha)h}$$

הוא קירוב ל- $f'(x)$. איך ניתן לבחור את α כך שהטעות תהיה מסדר גודל h^2 ?

(ב) הוכח שעבור כל בחירה של הקבוע $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ הביטוי

$$\frac{\alpha f(x+2h)+f(x+h)-f(x-h)-\alpha f(x-2h)}{2(1+2\alpha)h}$$

הוא קירוב ל- $f'(x)$ עם טעות מסדר גודל h^2. איך ניתן לבחור את α כך שהטעות תהיה מסדר גודל h^4 ?

(ג) הוכח שעבור כל בחירה של הקבוע $\alpha \neq -\frac{1}{4}$ הביטוי

$$\frac{\alpha f(x+2h)+f(x+h)-2(1+\alpha)f(x)+f(x-h)+\alpha f(x-2h)}{(1+4\alpha)h^2}$$

הוא קירוב ל- $f''(x)$. מהו סדר גודל הטעות ?

2. כתוב את שיטת אויילר לפתרון הבעיות הבאות:

(א) $u_t = u_{xx} + \alpha x u_x$, $t>0$, $0<x<1$ עם תנאי שפה $u(0,t)=0$, $u(1,t)=1$, ותנאי התחלה $u(x,0)=x$.

(ב) $u_t = u_{xx} + g(x,t)$, $t>0$, $0<x<1$, כאשר $g(x,t)$ היא פונקציה נתונה, עם תנאי שפה $u(0,t)=u(1,t)=0$ ותנאי התחלה $u(x,0)=f(x)$, כאשר $f(x)$ היא גם פונקציה נתונה.

(ג) $u_t = u_{xx}$, $t>0$, $-1<x<1$ עם תנאי שפה $u_x(-1,t)=-1$, $u_x(+1,t)=+1$, ותנאי התחלה $u(x,0)=\frac{1}{2}x^2$.

3. העזר בשיטת אויילר לפתור את המשוואת החום

$$u_t = u_{xx}\ , \qquad -2<x<2\ , t>0$$

עם תנאי שפה דיריכלה

$$u(-2,t)=u(2,t)=0$$

ותנאי התחלה

$$u(x,0)=x^4-2x^2-8$$

יש להתשמש ב- $h=\frac{1}{10},\frac{1}{20},\frac{1}{40}$ ו- $k=\frac{1}{500},\frac{1}{1000},\frac{1}{2000},\frac{1}{4000}$.
בכל מקרה יש לייצר גרפים של $u(x,0.5),u(x,1),u(x,2)$, אם אפשר.

(א) איזה תנאי נדרש להצלחת השיטה ?

(ב) מה ניתן להגיד לגבי הדיוק של התוצאות ?

(ג) מצא את הזמן המינימלי t כך שהפונקציה $u(x,t)$ היא אונימודלית (פונק' אונימודלית היא פונק' עם רק מינימום או מקסימום אחד). תן אומדן לדיוק של התשובה שנתת.

4. לבעיות הבאות יש לנסח את שיטת Crank-Nicolson. בכל מקרה יש לכתוב משוואות ברורות שמהן ניתן לעבור מקירוב של הפתרון בזמן t לקירוב של הפתרון ב־ $t+k$. יש התייחס בקפדנות לתנאיי שפה. יש להסביר בקצרה איך בפועל פותרים את המשוואות.

(1
$$u_t = u_{xx} \ , \qquad -2<x<2 \ , t>0$$
$$u(x,0) = x^4 - 2x^2 - 8 \ , \qquad u(-2,t) = u(2,t) = 0$$

(2
$$u_t = u_{xx} \ , \qquad 0<x<2 \ , t>0$$
$$u(x,0) = x^4 - 2x^2 - 8 \ , \qquad u_x(0,t) = u(2,t) = 0$$

(3
$$u_t = u_{xx} + g(x,t) \ , \qquad 0<x<1 \ , t>0$$
$$u(x,0) = f(x) \ , \qquad u(0,t) = a(t) \ , \qquad u(1,t) = b(t)$$

כאן $g(x,t), f(x), a(t), b(t)$ כולן פונקציות ידועות עם $f(0)=a(0)$, $f(1)=b(0)$.

(4
$$u_t = u_{xx} + \alpha x u_x \ , \qquad 0<x<1 \ , t>0$$
$$u(x,0) = x \ , \qquad u(0,t) = 0 \ , \qquad u(1,t) = 1$$

כאן α הוא קבוע.

5. פתור, בעזרת מטלב, את הבעיה בשאלה 4 סעיף א, למצוא את $u(x,0.5), u(x,1), u(x,2)$, על ידי שיטת Crank Nicolson. יש להשתמש ב־ $h=\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ ובכל מקרה לבדוק באיזה ערכים של k ניתן להשתמש ולקבל פתרון סביר. על ידי השוואת הפתרונות שלך לסעיפים הקודמים והפתרונות שלך לשאלה 3, הסבר מה יותר יעיל, שיטת Euler או שיטת Crank-Nicolson.

6. (א) כתוב תוכנית אשר משתמשת בשיטת Crank-Nicolson לפתור את הבעייה

$$v_\tau = v_{yy} + c v_y - dv \ , \quad y_{\min} < y < y_{\max} \ , 0 < \tau < \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

עם תנאי התחלה
$$v(y,0) = f(y)$$

ותנאיי שפה
$$v(y_{\min}, \tau) = a(\tau) \ , \qquad v(y_{\max}, \tau) = 0 \ .$$

כאן c, d הם קבועים ו־ $f(y), a(\tau)$ הן פונקציות ידועות עם $f(y_{\max}) = 0$ ו־ $f(y_{\min}) = a(0)$.
יש לאפשר לתוכנה לעבוד עם ערכים שונים של h, k, גודלי הצעד בכיווני y, τ בהתאם.

(ב) מהו הקשר בין הבעיה שפתרת בסעיף הקודם והמחירים של אופציית put אירופאית? העזר בתוכנית שכתבת למצוא מחירים של אופציה אירופאית והשווה את התוצאות נגד תוצאות נוסחת בלק־שולס

7. פתור את המשוואה

$$u_t = \frac{1}{10} u_{xx} + 10u(1-u) \ , \qquad 0<x<6 \ , 0<t<3$$

עם תאני התחלה $u(x,0)=0$ ותנאי שפה $u(0,t)=1$, $u(6,t)=0$ עבור $t>0$. (ניתן לפתור על ידי שינויים קלים בתוכנה שהשתמשתי בה בכיתה.) איך נראה הפתרון ? מצא, לכל $t \in [0,3]$, מספר $X(t) \in [0,6]$ כך ש־ $u(X(t),t) = \frac{1}{2}$. והראה ש־ $X'(t)$ שואף לקבוע כאשר t עולה. מהיא המשמעות של קבוע זה ?

בהצלחה!