בס"ד

ד"ר.גרמי שיף

גיומטריה דפרנציאלית, 88-526/826
תרגיל 1

1. הוכח שהקונוס הכפול $\{(x^1,x^2,x^3)\in\mathbf{R}^3 \mid (x^1)^-(x^2)^2-(x^3)^2=0\}$ איננו יריעה טופולוגית, אבל הקונוס הרגיל $\{(x^1,x^2,x^3)\in\mathbf{R}^3 \mid (x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2=0, x^1\geq 0\}$ הוא כן יריעה טופולוגית. (לקונוס הכפול ולקונוס הרגיל יש טופולוגיה סטנדרטית שהם מקבלים מהטופולוגיה הסטנדרטית ב-$\mathbf{R}^3$.)

2. דרך אחת לראות את $\mathbf{R}P^{n-1}$ כתת-קבוצה של $\mathbf{R}P^n$, זה להזהות את $\mathbf{R}P^{n-1}$ כישרים דרך הראשית ב-$\mathbf{R}^{n+1}$ שנמצאים בעל-מישור $x^{n+1}=0$. הוכח ש-$\mathbf{R}P^n\setminus\mathbf{R}P^{n-1}$ הומיומורפי ל-$\mathbf{R}^n$.

3. א. הראה איך לתת ל-S^2 מבנה של יריעה גזירה על ידי הטלה סטריוגרפית.
   ב. הראה איך לתת ל-S^2 מבנה של יריעה גזירה על ידי 6 ההעתקות f_1,f_2,f_3,g_1,g_2,g_3, כאשר

$$f_i:\{(x^1,x^2,x^3)\in S^2 \mid x^i>0\}\to\mathbf{R}^2$$
$$f_i(x^1,x^2,x^3)=(x^{i+1 \bmod 3},x^{i+2 \bmod 3})$$

$$g_i:\{(x^1,x^2,x^3)\in S^2 \mid x^i<0\}\to\mathbf{R}^2$$
$$g_i(x^1,x^2,x^3)=(x^{i+1 \bmod 3},x^{i+2 \bmod 3})$$

   (אין צורך לפרט עד הסוף).
   ג. האם שני האטלסים של סעיף א. וסעיף ב. נמצאים באותו אטלס מקסימלי?
   ד. הוכח שההעתקה $p:S^2\to\mathbf{R}$ שמוגדר על ידי $p(x^1,x^2,x^3)=x^3$ היא גזירה.

4. אם $(M_1,\mathcal{A}_1)$, $(M_2,\mathcal{A}_2)$ הן שתי יריעות גזירות, הראה איך לתת ל-$M_1\times M_2$ מבנה של יריעה גזירה, כך שההטלות

$$\pi_1:M_1\times M_2\to M_1$$
$$\pi_2:M_1\times M_2\to M_2$$

הם גזירות.

5. הגדר מערכת קואורדינטות ל-$\mathbf{R}^2$ על ידי

$$y^1(x^1, x^2) = x^1$$
$$y^2(x^1, x^2) = x^1 + x^2$$

ותהי f פונקציה גזירה, $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. מצא את

$$\frac{\partial f}{\partial y^1}(x^1, x^2) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y^2}(x^1, x^2)$$

האם זה נכון לומר שבגלל ש-$y^1 = x^1$, $\partial f/\partial y^1 = \partial f/\partial x^1$?