בס"ד

גאומטריה דפרנציאלית, 88-862 ד"ר ג'רמי שיף

מועד ב', סמסטר א', תשנ"ט

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
עליך לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות שווה.

1. אם M היא יריעה גזירה עם מטריקה רימנית $<\ ,\ >$, אומרים שהזוית בין שני ווקטורים לא-אפסיים $v, w \in TM_p$ ($p \in M$) היא

$$\theta(v,w) = \cos^{-1}\left(\frac{< v, w >_p}{\sqrt{< v, v >_p < w, w >_p}}\right) \ .$$

א. אם $M = \mathbf{R}^2$, מצא את הזוית בין הווקטורים $\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}$ בנקודה $(x,y) = (0,1)$ (x, y קואורדינטות סטנדרטיות ב-$\mathbf{R}^2$), כאשר המטריקה נתונה על ידי

$$\begin{aligned} &dx \otimes dx + dy \otimes dy && \text{(i)} \\ &dx \otimes dx + \frac{2dy \otimes dy}{1+y^2} && \text{(ii)} \\ &\frac{2(dx \otimes dx + dy \otimes dy)}{1+y^2} && \text{(iii)} \end{aligned}$$

ב. עבור M כללי, הוכח שאם עבור כל $p \in M$ וכל זוג v, w של ווקטורים לא אפסיים ב-TM_p הזוית בין v ו-w כאשר מחשבים אותה במטריקה $\sum_i \sum_j g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$ זהה לזוית שמחשבים במטריקה $\sum_i \sum_j h_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$, אזי קיימת פונקציה $f(x)$ כך ש- $h_{ij}(x) = f(x) g_{ij}(x)$ (כאן $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ מערכת כל שהיא של קואורדינטות על M).
(רמז: התבונן בזויות בין $\frac{\partial}{\partial x^1}$, $\frac{\partial}{\partial x^2}$ ו- $\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^1}$.)

2. הטורוס הוא משטח ב-$\mathbf{R}^3$ נתון על ידי הפרמטרזצייה

$$\begin{aligned} x &= (2 + \cos\phi)\cos\theta \\ y &= (2 + \cos\phi)\sin\theta \\ z &= \sin\phi \end{aligned}$$

א. מצא את המטריקה הרימנית המושרה על הטורוס מאת המטריקה הרימנית $dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ ב-$\mathbf{R}^3$. (יש להשתמש בקואורדינטות θ, ϕ.)

ב. מצא את סימני ה-Christoffel של המטריקה על הטורוס שמצאת בסעיף א.