

אנליזה הרמונית – תרגול 1

ציון הקורס מורכב מ 90% מבחן 10% תרגול כאשר יש להגיש את כל התרגילים. אין בדיקה על התרגילים. אתר הקורס הינו <http://u.math.biu.ac.il/~schiff/Teaching/83210> בו יופיעו התרגילים, תרגולים, מבחנים משנים שעברו וחומרי עזר.

מוטיבציה לטורי פורייה: נניח ויש לנו מערכת שמקבלת תמונה צבעונית של 100 פיקסלים ומחזירה את אותה תמונה רק עם צבעים חמים יותר



אזי למעשה לכל תמונה שנכניס נצטרך להכניס לזכרון של המערכת את אותה התמונה עם צבעים חמים יותר, מה שלא יעיל מבחינת חומרה!! פתרון אפשרי: נייצג כל פיקסל בתמונה ע"י צירוף של 3 צבעים(צבעי יסוד): אדום, ירוק וכחול (זה למעשה RGB). למשל אם נרצה לצבוע פיקסל מסוים סגול אז נייצג אותו ע"י

$$1_{\text{purpel}} = 1_{\text{red}} + 1_{\text{blue}}$$

נשים לב כי המערכת שלנו בעצם מגבירה את הרכיב האדום(נניח בפקטור של $\lambda > 0$) ולכן

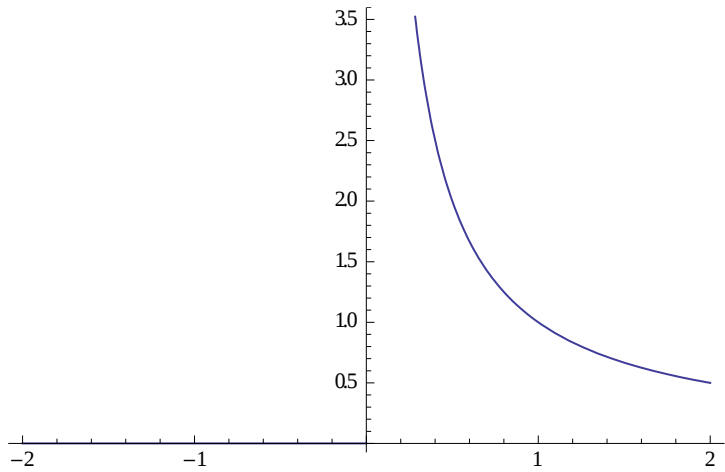
$$1_{\text{purpel}} \rightarrow H \rightarrow \lambda_{\text{red}} + 1_{\text{blue}}$$

עכשיו על מנת לממש את המערכת נוכל פשוט לקחת את הרכיב האדום של התמונה ולכפול אותו ב λ ולחבר אותו שוב לתמונה וכך נחסוך הרבה זיכרון! ניתן להראות כי כל מערכת LTI(linear time invariant) שפועלת על אות פועלת רכיב רכיב (למשל, מערכת שגורמת לאות דיבור להשמע עם יותר בס למעשה מגבירה את התדרים הנמוכים של האות) ומכאן החשיבות הרבה לפירוק פונקציות לרכיבי תדר.

הגדרה: נסמן ב $f \in E[-\pi, \pi]$ את מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$ ומקבלות ערכים ב $\mathbb{C}$. כלומר $E[-\pi, \pi]$ הוא מרחב הפונקציות $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ שיש להן מספר סופי של נקודות אי רציפות ובכל נקודת אי רציפות קיימים הגבולות החד צדדיים. נרשה גם ש f לא תהיה מוגדרת במספר סופי של נקודות.

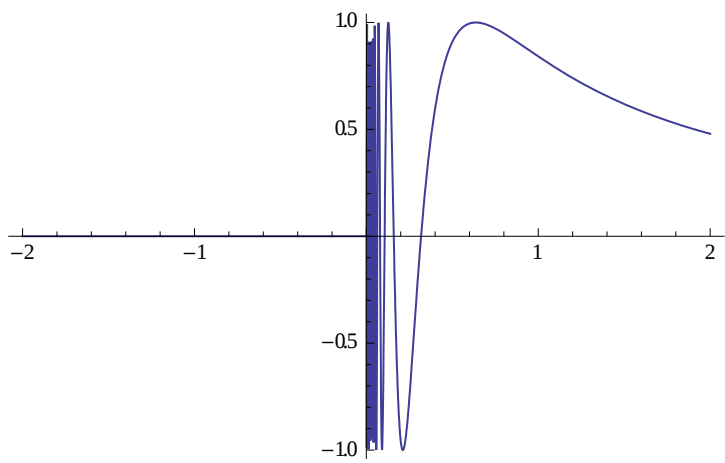
דוגמאות :

$$f = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



. $f \notin E[-\pi, \pi]$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ $\Rightarrow$

$$f = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



. $f \notin E[-\pi, \pi]$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \text{does not exist}$

$$f = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

אז f רציפה בכל נקודה חוץ מאשר בנקודה $x = 0$ שבה היא לא מוגדרת וקיימים הגבולות החד צדדיים בנק' $x = 0$ לכן $f \in E[-\pi, \pi]$. שימו לב כי המרחב $E[-\pi, \pi]$ הינו מרחב וקטורי.

תזכורת: מרחב מכפלה פנימית הינו מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$ אשר בנוסף לו נתונה לנו גם פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ אשר מקיימת את התכונות הבאות:

$$1. \quad \forall u, v \in V \quad \langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$$

$$2. \quad \forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \langle \alpha w + \beta u, v \rangle = \alpha \langle w, v \rangle + \beta \langle u, v \rangle$$

$$3. \quad \forall v \in V \quad \langle v, v \rangle \geq 0$$

$$4. \quad \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

דוגמא: על $\mathbb{R}^n$ יש לנו את המכפלה הפנימית הרגילה $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. אך שימו לב כי אם

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ הינו וקטור כך ש } \forall i \quad \alpha_i > 0 \text{ אזי גם } \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i \text{ תהייה מכפלה פנימית על } \mathbb{R}^n.$$

כלומר יש לנו אינסוף מכפלות פנימיות על $\mathbb{R}^n$ ולכן אינסוף מרחבי מכפלה פנימית שונים ב $\mathbb{R}^n$.

על המרחב $E[-\pi, \pi]$ נגדיר מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ באופן הבא : אם $f, g \in E[-\pi, \pi]$ אז

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \text{ . לדוגמא, אם } f(x) = x, g(x) = ix \text{ אז}$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \overline{(ix)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(-ix) dx = \frac{-i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{-2i\pi^2}{3}$$

תזכורת: מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית V הינו קבוצה של וקטורים $\{e_i\}_{i \in I}$ כך שמתקיים

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

דוגמא: ב $\mathbb{R}^2$ יש לנו את מערכת הסטנדרטית $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ אשר הינה אורתונורמלית ביחס

למכפלה הפנימית הרגילה ב $\mathbb{R}^2$ וגם פורשת לנו את כל $\mathbb{R}^2$. לעומת זאת גם

$$e_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \text{ עבור } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ הינה מערכת אורתונורמלית הפורשת את כל } \mathbb{R}^2.$$

כלומר לכל מכפלה פנימית ב $\mathbb{R}^2$ קיימות אינסוף מערכות אורתונורמליות הפורשות את כל $\mathbb{R}^2$.

במרחב $E[-\pi, \pi]$ יש לנו מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots \right\}$$

$$\langle f, g \rangle = \begin{cases} 1 & f = g \\ 0 & f \neq g \end{cases} \quad \text{כלומר, אם } f, g \in A$$

$$\text{דוגמא: ניקח } g(x) = \cos x, \quad f(x) = \sin x$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos 2x}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{4\pi} (\cos 2\pi - \cos(-2\pi)) = 0$$

טור פורייה

הרעיון מאחורי המושג טור פורייה הוא רחב ועמוק ומלמעשה ילמד לאורך כל הקורס. אך על מנת לקבל תחושה אינטואיטיבית למושג טור פורייה נתחיל בהגדרה די פשטנית (שתינתן באופן מסודר יותר בהמשך הקורס).

הגדרה: בהינתן מרחב מכפלה פנימית V עם מערכת אורתונורמלית $\{e_i\}_{i \in I}$ הפורשת את V , כלומר $\text{span}\{e_i\} = V$, טור הפורייה של $v \in V$ נתון ע"י

$$v \sim \sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle e_i$$

דוגמא: מצא את הטור הפורייה של $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ביחס למכפלה הפנימית הרגילה וביחס למערכת

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{האורתונורמלית}$$

פתרון: נחשב את מקדמי הפורייה של e_1, e_2 : $\langle v, e_1 \rangle = 0, \langle v, e_2 \rangle = \sqrt{2}$. לכן נקבל

$$v \sim \sum_{i=1}^2 \langle v, e_i \rangle e_i = 0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

במקרה שמרחב המכפלה הפנימית הינו $E[-\pi, \pi]$, המכפלה הפנימית נתונה ע"י

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots \right\}$$

נסמן את מקדמי הפורייה בצורה הבאה:

עבור ה- $\cos nx$ נסמן את מקדם הפורייה ב- $a_n = \langle f, \cos nx \rangle$, עבור $\sin nx$ נסמן ב-

$b_n = \langle f, \sin nx \rangle$ ואת המקדם של $\frac{1}{\sqrt{2}}$ נסמן ב- $a = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$. לכן הטור פורייה של $f \in E[-\pi, \pi]$

יהיה מהצורה $f \sim a \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. מטעמי נוחות נוהגים לרשום $a = \frac{a_0}{\sqrt{2}}$ והטור

יראה מהצורה $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, שימו לב כי במקרה זה

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \neq \langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$$

דוגמא: חשבו את הטור פורייה של $f(x) = |x|$ $-\pi \leq x \leq \pi$.

פתרון: אנו צריכים למצוא את a_n, b_n ו- a_0 . כיוון ש- f זוגית נקבל כי

$$b_n = \langle f, \sin(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0$$

נחשב את a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even} \end{cases} \end{aligned}$$

עבור a_0 נקבל

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi. \text{ מכאן שהטור פורייה של } f(x) = |x| \text{ נתון ע"י}$$

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x)$$

הערה: הטור פורייה F הוא אופרטור ליניארי כלומר $F(f+g) = F(f) + F(g)$ ו-

$F(\alpha f) = \alpha F(f)$ (כאשר $\alpha \in \mathbb{C}$ ו- $f, g \in E[-\pi, \pi]$).

דוגמא: חשבו את הטור פורייה של $x(x+1)$ ו- x^2 .

פתרון: נחשב את טור פורייה של $f(x) = x^2$.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}, b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \quad \text{ולכן}$$

כדי לחשב את הטור פורייה של $x(x+1)$ נשתמש בתכונת הלינאריות:

$$\begin{aligned} F[x(1+2x)] &= F[x] + 2F[x^2] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) + 2\left[\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)\right] \\ &= \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \end{aligned}$$