

אנליזה הרמונית תרגיל 10

משפט הקונבולוציה

רקע תיאורטי: משפט הקונבולוציה קובע כי לכל $f, g \in G(\mathbb{R})$ מתקיים

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$$

החשיבות של נוסחה זו נובעת מכך שהיא מאפשרת לנו לחשב את המוצא של מערכות LTI. כידוע, מערכת LTI היא כזו אשר פועלת על האות f באופן הבא $L(f) = h * f$. לכן נוכל לחשב את הטרנספורם פורייה של המוצא ולאחר מכן להתמיר חזרה.

1. על ידי שימוש בהתמרות פורייה פתור את המשוואות האינטגרליות הבאות:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(x-t) dt = e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad \text{א.}$$

פתרון: נזכור כי התמרת פורייה של גאוסיאן היא $\mathcal{F}(e^{-\alpha x^2}) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$. ניקח התמרת פורייה בשני האגפים ונקבל עפ"י משפט הקונבולוציה

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(x-t) dt\right) &= 2\pi \hat{f}^2 = \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \\ \Leftrightarrow \hat{f}^2 &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \Leftrightarrow \hat{f} = (2\pi)^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} = (2\pi)^{-\frac{3}{4}} (4\pi)^{\frac{1}{2}} \left((4\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \right) \end{aligned}$$

ניקח התמרה הפוכה משני הצדדים ונקבל

$$f = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}$$

ב. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2}$ כאשר $0 < a < b$

פתרון: נשים לב כי ההתמרה של הפונקציה $e^{-a|x|}$ היא $\frac{1}{2\pi} \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$. עפ"י מה שלמדנו מתקיים שאם ל $\hat{f}$ יש התמרת פורייה אזי $\hat{f} = \frac{1}{2\pi} f(-x)$. מכיוון ש

$$\frac{1}{2\pi} \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\widehat{f * \frac{1}{x^2 + a^2}} = 2\pi \hat{f} \widehat{\frac{1}{2a} \frac{2a}{a^2 + x^2}} = 2\pi \hat{f} \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$$

$$\Rightarrow 2\pi \hat{f} e^{-a|\omega|} \frac{1}{2a} = \frac{1}{2b} e^{-b|\omega|} \Rightarrow \hat{f} = \frac{a}{2\pi b} e^{-(b-a)|\omega|} \Rightarrow f = \frac{a}{2\pi b} \frac{2(b-a)}{(b-a)^2 + x^2}$$

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-|x-t|} dt = e^{-|x|} + |x| e^{-|x|}$

פתרון: נוכל לרשום זאת כך

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-|x-t|} dt = e^{-|x|} + \left(-x e^{-(-x)} u(-x) + x e^{-x} u(x) \right)$$

נשתמש בהגדרה $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$. נקבל כי

$$\widehat{xu(x)e^{-x}} = \frac{1}{(1+i\omega)^2} \text{ ולכן } \widehat{u(x)e^{-x}} = \frac{1}{1+i\omega} \text{ וגם } \widehat{e^{-|x|}} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\widehat{-xu(-x)e^x} = \frac{1}{(1-i\omega)^2} \text{ נקבל כי } f \text{ עבור } f(-x) = \overline{\widehat{f(x)}}$$

נשתמש במשפט הקונבולוציה ונקבל כי

$$\hat{f} \frac{2}{(1+\omega^2)} = \frac{2}{(1+\omega^2)} + \frac{1}{(1+i\omega)^2} + \frac{1}{(1-i\omega)^2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{f} \frac{2}{(1+\omega^2)} = \frac{2(1+\omega^2) + (1-i\omega)^2 + (1+i\omega)^2}{(1+\omega^2)^2} = \frac{4}{(1+\omega^2)^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\pi e^{-|x|}$$