תרגול 11 – אנליזה הרמונית

משפט הדגימה

רקע תיאורטי : הרבה פעמים נרצה לסנן רעשים באות אנלוגי ע"י מסנן דיגיטלי. השאלה הנשאלת היא באיזה תדר לדגום? ברור כי אם נדגום בקצב גבוה מאוד נייצג את האות בצורה טובה יותר אך הדבר יהיה כרוך בעלויות גבוהות. לעומת זאת, נדגום את האות בקצב נמוך מדי לא באמת נקבל את כל המידע על האות. לדוגמא, אם נדגום את האות $\mathrm{x}(t)=\sin(t)$ בנקודות זמן $T=k\pi$ כאשר $k\in\mathbb{Z}$ אנו עלולים לחשוב שדגמנו את האות $x(t)=0$ הפתרון לבעיה זו נמצא במשפט הדגימה של שאנון שאומר את הדבר הבא: אם לאות $x(t)$ יש התמרת פורייה $X(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-if2\pi t}$ כך ש $X(f)=0$ עבור $|f|>B$ אזי נוכל לשחזר את האות ע"י לקיחת דגימות שלו $x(nT)$ כאשר $f_s=\frac{1}{T}>2B$ שזהו למעשה תדר נייקוויסט של האות.

במקרה זה נקבל כי

$$X_s(f)\equiv\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(f-kf_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{T}{2\pi}x(nT)e^{-i2\pi nTf}.$$

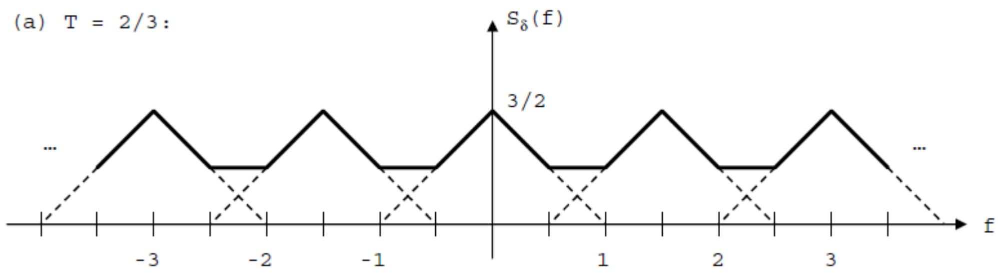
1. נניח ולאות $s(t)$ יש טרנספורם פורייה $\widehat{s(t)}=tri\left(\frac{f}{2}\right)$. ציירו את ההתמרת פורייה של האות הדגום $s_\delta=s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=s(nT)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ עבור

א. $T=\frac{2}{3}$.

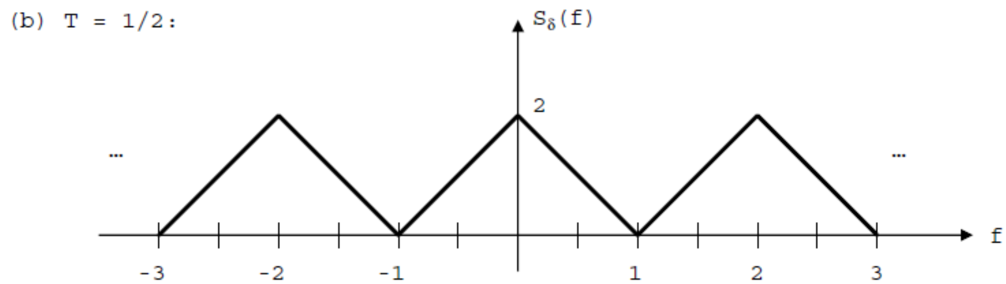
ב. $T=\frac{1}{2}$.

פתרון:

א. מכיוון שרוחב הפס של האות הינו $B=1$ נקבל כי תדר נייקוויסט, התדר המינימלי בו ניתן לדגום כך שנשמור על כל המידע שלו הינו $f_s=2B=2$ ולכן $T=\frac{1}{f}=\frac{1}{2}$ הינו מרחק הדיגמה שצריך לקחת. אבל $\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$ ומכאן שנקבל allising, כלומר תהיה חפיפה בהתמרה ונאבד מידע.



ב. כאן תדר הדגימה הוא בדיוק תדר נייקויסט ולכן לא יהיה allising וכל מידע האות ישמר.



התמרת DTFT

<u>רקע תיאורטי:</u>

ראינו כי משפט הדגימה של שנון אומר באיזה תדר עלינו לדגום את האות שלנו על מנת לא לאבד מידע של אות צר סרט. דיברנו על כך שבמציאות שלא ניתן לעבד אותות רציפים ולכן יד לדגום אותם. האות הדגום $x(t)$ יהיה

$$x_s(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

כמו כן, ראינו כי התמרת הפורייה של האות הדגום תהייה

$$\widehat{x_s}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-i\omega nT} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_0)$$

כאשר $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. מכאן נובעת החשיבות של התמרת ה DTFT, ככווץ והזזות של התמרת הפורייה של האות הרציף.

הערות: שימו לב כי בניגוד להתמרת פורייה, ה DTFT הינו מחזורי 2π.

דוגמא : מצא את ה DFT האות $x[n] = a^n u[n]$ עבור $|a| < 1$.

פתרון: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{-i\omega}\right)^n = \frac{1}{1-ae^{-i\omega}}$.