

תרגול 13 – אנליזה הרמונית

התמרת DFT

רקע תיאורטי: עד כה דיברנו על התמרות של אותות אינסופיים בזמן. בדרך כלל נרצה לבצע התמרות על אותות סופיים בזמן. לדוגמא, לסנן רעשים משיר שהורדנו ב youtube וכו'. עבור אותות סופיים בזמן נשתמש בהתמרת פורייה ה דיסקרטית - DFT.

תזכורת: נניח כי $f_n : \{-\frac{N}{2}+1, -\frac{N}{2}+2, \dots, \frac{N}{2}\} \rightarrow \mathbb{C}$ הינו אות דיסקרטי. אזי התמרת ה DFT של f_n תהיה

$$F_m = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{-2\pi i m n / N}$$

וההתמרה ההפוכה תהיה

$$f_n = \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} F_m e^{2\pi i m n / N}$$

שוויון פרסבל הינו

$$\frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} |f_n|^2 = \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} |F_m|^2$$

$$1. \text{ חשבו את ההתמרה של האות } f_n = \begin{pmatrix} N-1 \\ n + \frac{N}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ עבור } -\frac{N}{2}+1 \leq n \leq \frac{N}{2}.$$

פתרון: עפ"י הגדרה

$$\begin{aligned}
 F_m &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{-2\pi i m n / N} \stackrel{j=n+\frac{N}{2}-1}{=} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_{j+\frac{N}{2}} e^{-2\pi i m \left(j-\frac{N}{2}+1\right) \frac{1}{N}} \\
 &= \frac{e^{-\frac{2\pi i m}{N} \left(1-\frac{N}{2}\right)}}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_{j+\frac{N}{2}} e^{\frac{2\pi i m j}{N}} = \frac{e^{-\frac{2\pi i m}{N} \left(1-\frac{N}{2}\right)}}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} e^{\frac{2\pi i m j}{N}} \\
 &= \frac{e^{-\frac{2\pi i m}{N} \left(1-\frac{N}{2}\right)}}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} 1^{N-1-j} \cdot \left(e^{\frac{2\pi i m}{N}}\right)^j = \frac{e^{-\frac{2\pi i m}{N} \left(1-\frac{N}{2}\right)}}{N} \left(1 + e^{\frac{2\pi i m}{N}}\right)^{N-1}
 \end{aligned}$$

2. הסתכלו על האות $x[n] = \cos\left[\frac{2\pi \cdot 3}{10}n\right]$.

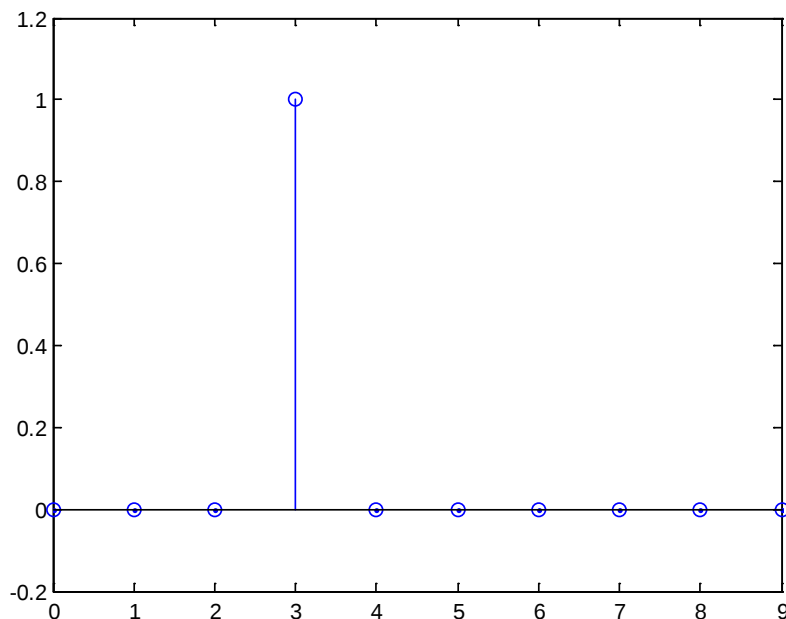
i. איך נראה ה DFT עבור $0 \leq k \leq 9$?

ii. חשבו את $\sum_{n=1}^{10} \cos^2\left[\frac{2\pi \cdot 3}{10}n\right]$.

פתרון:

i. אנו יודעים כי ה DFT של $e^{i\frac{2\pi r}{N}n}$ עבור r שלם הינו $\delta[(k-r)]_N$ כאשר $(\)_N$

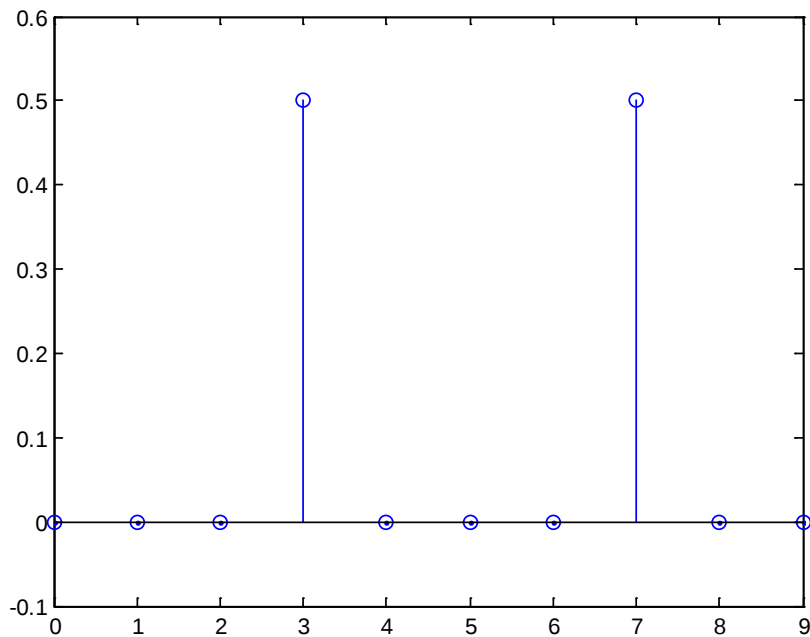
מציין מחזור של מודולו N . לכן ה DFT של האות $e^{i\frac{2\pi 3}{10}n}$ זה יראה כך



כמובן ש $x[n] = \cos\left[\frac{2\pi \cdot 3}{10}n\right] = \frac{1}{2} \left(e^{i\frac{2\pi 3}{10}n} + e^{-i\frac{2\pi 3}{10}n} \right)$ ולכן ה DFT שלו יהיה

$$\frac{1}{2}(\delta[(k-3)_N] + \delta[(k+3)_N])$$

כלומר קיבלנו דלתא בגובה $\frac{1}{2}$ ב 3 ו ב 3- אבל מכיוון שזה 3- מודולו 10 נקבל דלתא גם ב $k=7$.



ii. עפ"י שוויון פרסבל נקבל כי

$$\sum_{n=5-1}^5 \cos^2[\frac{2\pi 3}{10}n] = \sum_{n=0}^9 \cos^2[\frac{2\pi 3}{10}n] = 10 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 10$$

3. (מבחן תשע"ד) אם התמרת הפורייה הדסקרטית של האות f_{-1}, f_0, f_1, f_2 היא F_{-1}, F_0, F_1, F_2 מצא את התמרת הפורייה הדסקרטית של האות

$$\frac{1}{2}(f_2 + f_{-1}), f_{-1}, \frac{1}{2}(f_{-1} + f_0), f_0, \frac{1}{2}(f_0 + f_1), f_1, \frac{1}{2}(f_1 + f_2), f_2$$

באופן יותר כללי, אם ההתמרה של האות $\{f_n\}_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$ היא $\{F_m\}_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$, מצא את ההתמרה

של האות $\{g_n\}_{n=-N+1}^N$ הנתון ע"י

$$g_n = \begin{cases} f_{n/2} & n \text{ even} \\ \frac{1}{2} \left(f_{(n-1)/2 \bmod N} + f_{(n+1)/2} \right) & n \text{ odd} \end{cases}$$

פתרון: התמרת פורייה הדיסקרטית נתונה עפ"י

$$F_m = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{-\frac{i2\pi nm}{N}}$$

נציב $2N$ ונקבל

$$\begin{aligned} G_m &= \frac{1}{2N} \sum_{n=-N+1}^N g_n e^{-\frac{i\pi nm}{N}} = \frac{1}{2N} \sum_{n \text{ even}} g_n e^{-\frac{i\pi nm}{N}} + \frac{1}{2N} \sum_{n \text{ odd}} g_n e^{-\frac{i\pi nm}{N}} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} g_{2n} e^{-\frac{i\pi(2n)m}{N}} + \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} g_{(2n-1)} e^{-\frac{i\pi(2n-1)m}{N}} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{-\frac{i\pi(2n)m}{N}} + \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{2} (f_{n-1} + f_n) e^{-\frac{i\pi(2n-1)m}{N}} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{-\frac{i\pi(2n)m}{N}} + \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \frac{f_{n-1}}{2} e^{-\frac{i\pi(2n-1)m}{N}} + \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \frac{f_n}{2} e^{-\frac{i\pi(2n-1)m}{N}} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{-\frac{i\pi(2n)m}{N}} + \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \frac{f_{n-1}}{2} e^{-\frac{i\pi(2n)m}{N}} e^{\frac{i\pi m}{N}} + \frac{1}{2N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \frac{f_n}{2} e^{-\frac{i\pi(2n)m}{N}} e^{\frac{i\pi m}{N}} \\ &= \frac{1}{2} F_m + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \frac{f_{n-1}}{2} e^{-\frac{i\pi(2n)m}{N}} e^{\frac{i\pi m}{N}}}_{\text{DFT of } \frac{f_{n-1}}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} F_m e^{\frac{i\pi m}{N}} \\ &= \frac{1}{2} F_m + \frac{1}{2} \left(F_m e^{-\frac{i\pi 2m}{N}} \right) e^{\frac{i\pi m}{N}} + \frac{1}{2} F_m e^{\frac{i\pi m}{N}} \\ &= \frac{1}{2} F_m + \frac{1}{2} \frac{1}{2} F_m e^{-\frac{i\pi m}{N}} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} F_m e^{\frac{i\pi m}{N}} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi m}{N} \right) F_m \end{aligned}$$