

תרגול 3

בשעור הקודם דיברנו על טור הפורייה של פונקציות זוגיות ואי זוגיות. נמשיך עם דוגמא.

דוגמא: נחשב את הטור פורייה של $f(x) = e^{-|x|}$ ב $-\pi \leq x \leq \pi$. כיוון ש f זוגית נובע ש $b_n = 0$.
נחשב את a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-|x|} \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-|x|} \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|} e^{inx} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|} e^{-inx} dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{in-1} e^{-x+inx} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{in+1} e^{-x-inx} \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{(in+1)e^{-x+inx} \Big|_0^{\pi} + (1-in)e^{-x-inx} \Big|_0^{\pi}}{n^2+1} \right) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2 \operatorname{Re}[(in+1)e^{-x+inx} \Big|_0^{\pi}]}{n^2+1} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{2(-ne^{-x} \sin nx + e^{-x} \cos nx) \Big|_0^{\pi}}{n^2+1} \right) = \frac{2(1-e^{-\pi}(-1)^n)}{\pi(n^2+1)} \end{aligned}$$

נחשב בנוסף את a_0 :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} dx = -\frac{2}{\pi} (e^{-\pi} - 1)$$

מכאן ש

לקן

$$e^{-|x|} \sim \frac{(e^{-\pi} - 1)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-e^{-\pi}(-1)^n)}{\pi(n^2+1)} \cos(nx)$$

טור פורייה מרוכב

בנוסף למערכת הא"נ שראינו במרחב $E[-\pi, \pi]$ יש עוד מערכת א"נ $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ביחס למכפלה

הפנימית $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$. ביחס למערכת הזו יש לפונקציה f פיתוח לטור פורייה

מרכב

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \langle f, e^{inx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

הקשר בין הטור פורייה הממשי לטור פורייה המרוכב ניתן בצורה הבאה: אם $n \geq 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \end{aligned}$$

ובאותו אופן אם $n \geq 0$ אז $c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n)$.

לכן

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) & c_{-n} &= \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \\ a_n &= c_n + c_{-n} & b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

דוגמא:

א. נניח ש $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, חשבו את הטור פורייה המורכב של $\bar{f}$, $\text{Re}(f)$ ו-

$$\sin(2x) f(x).$$

ב. חשבו את הטור פורייה המרוכב של $\cos(px) = \text{Re}(e^{ipx})$, $p \notin \mathbb{Z}$

פתרון:

א. מספיק לחשב את המקדמים של הטור פורייה המרוכב.

$$c_n(\bar{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x) e^{inx}} dx$$

$$= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx} = \overline{c_{-n}(f)}$$

$$c_n(\text{Re } f) = c_n\left(\frac{1}{2}(f + \bar{f})\right) = \frac{1}{2}(c_n(f) + c_n(\bar{f})) = \frac{1}{2}(c_n(f) + \overline{c_{-n}(f)})$$

כעת נחשב

$$\begin{aligned}
c_n(\sin(2x) f(x)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) f(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(n-2)x} dx \\
&\quad - \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(n+2)x} dx = \frac{1}{2i} (c_{n-2}(f) - c_{n+2}(f))
\end{aligned}$$

ב. כדי לחשב את הטור פורייה המרוכב של $\operatorname{Re}(e^{ipx})$ נחשב קודם את הטור פורייה המרוכב של e^{ipx} .

$$\begin{aligned}
c_n(e^{ipx}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p-n)x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(p-n)x}}{i(p-n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(p-n)\pi} - e^{-i(p-n)\pi}}{i(p-n)} = \frac{1}{\pi(p-n)} \sin((p-n)\pi)
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
c_n(\cos px) &= c_n(\operatorname{Re}(e^{ipx})) = \frac{1}{2} (c_n(e^{ipx}) + c_{-n}(e^{ipx})) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi(p-n)} \sin((p-n)\pi) + \frac{1}{\pi(p+n)} \sin((p+n)\pi) \right)
\end{aligned}$$