

תרגול 5 – אנליזה הרמונית

בתרגול זה נדון בהתכנסות במ"ש וגזירה איבר איבר של טור פורייה.

משפט: אם f רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$, $f(\pi) = f(-\pi)$, ו $f' \in E[-\pi, \pi]$ אז הטור פורייה של f מתכנס במידה שווה להמשכה המחזורית $\tilde{f}$ של f על כל הישר והטור פורייה של f' מתקבל על ידי גזירה איבר איבר של הטור פורייה של f . כלומר, אם

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

אז

$$f' \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx))$$

דוגמא: תהי

$$f(x) = \begin{cases} Ax + B & -\pi < x < 0 \\ \cos x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

עבור אילו ערכים של A ו B יתכנס הטור פורייה של f במ"ש ל $\tilde{f}$?

פתרון: ראשית, נדרוש ש $f(\pi) = f(-\pi)$, לכן $A(-\pi) + B = \cos \pi = -1$, כלומר $-\pi A + B = -1$.

כדי ש f תהיה גם רציפה נדרוש ש $f(0+) = f(0-) = \cos(0) = 1$, כלומר $B = 1$. לכן $B = 1$ ו

$$A = \frac{2}{\pi}.$$

דוגמא: בעזרת הטור פורייה של הפונקציה $f(x) = \cos(ax)$ ($a \notin \mathbb{Z}$), חשבו את הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{a^2 - (2n-1)^2}$$

פתרון: קודם כל נחשב את הטור פורייה של $f(x) = \cos(ax)$, כיוון ש f פונקציה זוגית נובע ש

$$b_n = 0, \text{ נחשב את } a_n:$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax) \cos(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((a+n)x) + \cos((a-n)x) dx$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin((a+n)x)}{a+n} + \frac{\sin((a-n)x)}{a-n} \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(ax)\cos(nx) + \sin(nx)\cos(ax)}{a+n} + \frac{\sin(ax)\cos(nx) - \sin(nx)\cos(ax)}{a-n} \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(-1)^n (\sin(a\pi) - \sin(-a\pi))}{a+n} + \frac{(-1)^n (\sin(a\pi) - \sin(-a\pi))}{a-n} \right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi} \left(\frac{\sin(a\pi)}{a+n} + \frac{\sin(a\pi)}{a-n} \right) = \frac{(-1)^n}{\pi} \left(\frac{2a \sin(a\pi)}{a^2 - n^2} \right)
\end{aligned}$$

לכן

$$\cos(ax) \sim \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} \left(\frac{2a \sin(a\pi)}{a^2 - n^2} \right) \cos(nx)$$

כיוון ש $f(x) = \cos(ax)$ מקיימת $f(\pi) = f(-\pi)$ ו f רציפה ו $f' \in E[-\pi, \pi]$ נקבל שעבור $-\pi \leq x \leq \pi$ מתקיים

$$\cos(ax) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} \left(\frac{2a \sin(a\pi)}{a^2 - n^2} \right) \cos(nx)$$

לפי המשפט שניסחנו ניתן לבצע גזירה איבר איבר של האגף הימני כדי לקבל את הטור פורייה של הפונקציה $a \sin(ax)$:

$$a \sin(ax) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2an \sin(\pi a)}{\pi(a^2 - n^2)} \sin(nx)$$

כיוון ש $\sin(ax)$ רציפה עם נגזרות חד צדדיות נקבל שעבור $-\pi \leq x \leq \pi$

$$a \sin(ax) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2an \sin(\pi a)}{\pi(a^2 - n^2)} \sin(nx)$$

נציב $x = \frac{\pi}{2}$ ונקבל $(n = 2k - 1)$

$$a \sin(ax) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2a(2k-1)\sin(\pi a)}{\pi(a^2 - (2k-1)^2)} (-1)^{k-1}$$

כלומר

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{a^2 - (2n-1)^2} = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)}{2 \sin(\pi a)}$$