

## תרגול 6 - אנליזה הרמונית

### שיויון פרסבל

רקע תיאורטי : משפט פרסבל מקשר בין האנרגיה של האות לו אנו רוצים למצוא את מקדמי פורייה ומקדמי פורייה של האות. נניח ש  $f$  הינה פונקציה אותה אנו רוצים לקרב ע"י טור פורייה. בפועל, לא נוכל לעולם לקרב את האות שלנו בצורה מושלמת, כלומר, לא נוכל לשמור במחשב את כל המקדמים של האות. נשאלת השאלה, כמה מקדמים לשמור?

נניח והאות שלנו  $f(t) = t^2$  מציין את המתח בנקודה מסויימת במעגל חשמלי. אזי  $f^2(t)$  יציין את ההספק (במידה וההתנגדות היא 1). אם נבצע אינטגרציה על האות שלנו נקבל את האנרגיה שלו  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{2\pi^5}{5}$ . כלומר האנרגיה של האות היא  $\frac{2\pi^4}{5}$  וואט שעה. נניח ומספיק לנו קירוב של האות שלנו ב 99.9% מהאנרגיה. עפ"י משפט פרסבל נובע כי אם נקרב את האות שלנו ע"י

$$S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^M a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

נקבל כי האנרגיה של הטעות הינה במקרה שלנו

$$\frac{\sum_{n=M}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2}\right)^2}{\frac{2\pi^5}{5}} < 0.001 \text{ , נמצא את ה } M \text{ המינימלי כך ש } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_M(x)|^2 dx = \sum_{n=M}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2}\right)^2$$

ניתן לבדוק כי מספיק לקחת את 5 האיברים הראשונים לקירוב האות.

משפט פרסבל: לכל  $f \in E[-\pi, \pi]$  מתקיים השיויון

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

כאשר  $a_n$  ו  $b_n$  הינם מקדמי פורייה של  $f$ .

דוגמא: מצאנו כי הטור פוריה של  $f(x) = x^2$  הוא  $f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$  ולכן משויון

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{5} \text{ כיוון ש } \left( a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} \right) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}$$

פרסבל נקבל  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$  ש

### שיויון פרסבל המרוכב

אם ל  $f \in E[-\pi, \pi]$  יש פיתוח לטור פוריה מרוכב  $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$  אז מתקיים השיויון

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

דוגמא: תהי  $f$  פונקציה רציפה כך ש  $f' \in E[-\pi, \pi]$  ו  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$  ,  $f(\pi) = f(-\pi)$  .

$$\text{הראו ש } \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt \geq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

פתרון: נפתח את  $f$  לטור פוריה מרכיב  $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$  ונשים לב ש  $f$  מקיימת את התנאים

להתכנסות במ"ש של הטור פוריה של  $f$  , לכן ניתן לגזור את הטור פוריה המרכיב איבר איבר

$$\text{ולקבל את הטור פוריה המרכיב של } f' - f' \sim \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} i n c_n e^{inx} . \text{ כיוון ש } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$\text{נובע ש } c_0 = 0 \text{ לכן שוויון פרסבל המתאים ל } f \text{ הוא } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |c_n|^2 . \text{ השוויון}$$

$$\text{פרסבל של } f' \text{ הוא: } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} n^2 |c_n|^2 > \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

## דעיכה של מקדמים

רקע תיאורטי: משוויון פרסבל נובע כי המקדמי פורייה של  $f \in E[-\pi, \pi]$  חייבים לשאוף לאפס. נוכל הרבה פעמים לדעת האם קיים טור פורייה עם מקדמים נתונים או לא.

$$\text{דוגמא: האם תתכן פונקציה } f \in E[-\pi, \pi] \text{ כך ש } f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{inx}}{\sqrt{2n-1}} .$$

פתרון: נשתמש בשוויון פרסבל ונקבל:

$$\infty > \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty$$

אם  $f \in E[-\pi, \pi]$  ו  $a_n, b_n$  הם מקדמי פוריה של  $f$  , אז משוויון פרסבל נקבל:

$$\infty > \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

ולכן מתנאי הכרחי להתכנסות טור נקבל  $a_n, b_n \rightarrow 0$  (אם  $c_n \rightarrow 0$ ). אם  $f$  מקיימת  $f(\pi) = f(-\pi)$ ,  
 $f$  רציפה ו  $f'$  רציפה למקוטעין אז כפי שראינו מתקיים  $a_n(f') = nb_n(f)$ ,  $b_n(f') = -na_n(f)$ ,  
 וכיוון שמתקיים  $a_n(f'), b_n(f') \rightarrow 0$  נקבל ש  $na_n(f), nb_n(f) \rightarrow 0$ .

דוגמא: האם תיתכן פונקציה רציפה  $f$  המקיימת  $f(\pi) = f(-\pi)$ , כך ש  $f'$  רציפה למקוטעין ול  $f$

$$\text{טור פורייה } f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} ?$$

פתרון: הפונקציה  $f$  מקיימת את התנאים להתכנסות במ"ש ולכן נוכל לגזור על מנת לקבל את הטור  
 פורייה של  $f'$ . כלומר,

$$b_n(f') = -na_n(f) = -n \frac{1}{n} = -1.$$