

תרגול 7 – אנליזה הרמונית

מרחב מכפלה פנימית

רקע תאורטי: מרחב מכפלה פנימית הינו למעשה הכללה של כל מה שראינו עד כה. הגדרנו מרחב פונקציות $E[-\pi, \pi]$ שהינו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ (סגור לחיבור וחסור וכפל במספר מרוכב) וראינו כי קיימת

פונקציה $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ המקיימת את התכונות הבאות:

i. לינאריות במשתנה השני- $\langle \alpha f + \beta h, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle h, g \rangle$

ii. סימטריות צמודה - $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

iii. חיוביות ממש - $\langle f, f \rangle \geq 0$ ואם $\langle f, f \rangle = 0$ אז $f \equiv 0$.

כעת נגדיר מרחב מכפלה פנימית כמרחב וקטורי X בו קיימת פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle$ המקיימת את i-iii.

דוגמאות:

1. המרחב $\mathbb{R}^n$ תחת חיבור וחסור וקטורי הינו מרחב מכפלה פנימית ביחס ל $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

2. מרחב הפונקציות $L^2(\mathbb{R})$ המוגדרות על כל הישר הממשי, מקבלות ערכים ממשיים, והאינטגרליות,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx$$

הינו מרחב מכפלה פנימית עם המכפלה הפנימית

תרגיל: נגדיר $X = C^1[0,1]$ להיות מרחב כל הפונקציות הרציפות $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ בעלות נגזרת רציפה

על כל הקטע $[0,1]$. הראו כי $\langle f, g \rangle = f(0) \overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx$ הינה מכפלה פנימית ב X .

פתרון:

נבדוק תכונות:

i.

$$\begin{aligned} \langle \alpha f + \beta h, g \rangle &= (\alpha f(x) + \beta h(x))(0) \overline{g(0)} + \int_0^1 (\alpha f(x) + \beta h(x))' \overline{g'(x)} dx \\ &= (\alpha f(x) + \beta h(x))(0) \overline{g(0)} + \int_0^1 (\alpha f'(x) + \beta h'(x)) \overline{g'(x)} dx \\ &= \alpha f(0) \overline{g(0)} + \beta h(0) \overline{g(0)} + \int_0^1 (\alpha f'(x) + \beta h'(x)) \overline{g'(x)} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha f(0) \overline{g(0)} + \int_0^1 \alpha f'(x) \overline{g'(x)} dx + \beta h(0) \overline{g(0)} + \int_0^1 \beta h'(x) \overline{g'(x)} dx \\
&= \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle h, g \rangle
\end{aligned}$$

.ii

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= f(0) \overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx = \overline{\overline{f(0) \overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx}} \\
&= \overline{f(0) \overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx} = \overline{f(0)} \overline{\overline{g(0)}} + \int_0^1 \overline{f'(x)} \overline{\overline{g'(x)}} dx = \overline{f(0)} g(0) + \int_0^1 \overline{f'(x)} g'(x) dx = \langle g, f \rangle
\end{aligned}$$

.iii

$$\langle f, f \rangle = f(0) \overline{f(0)} + \int_0^1 f'(x) \overline{f'(x)} dx = |f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq 0$$

על מנת להראות כי אם $\langle f, f \rangle = 0$ אז $f \equiv 0$ נעזר בלמה הבאה:

$$\text{למה: תהי } f \text{ פונקציה רציפה בקטע } [a, b], \text{ אזי } f \equiv 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f(x)| dx = 0$$

הוכחה: נניח בשלילה כי $f \neq 0$. מכיוון ש $|f|$ רציפה בקטע סגור היא מקבלת את המקסימום שלה בקטע. נסמן $M = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| > 0$. נניח כי המקסימום מתקבל ב $x = x_0$, מכיוון ש

רציפה נובע כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סביבה $|x - x_0| < \delta$ כך ש $|f(x)| \in (M - \varepsilon, M]$ לכל $|x - x_0| < \delta$. בפרט ניקח ε כזה כך ש $M - \varepsilon > 0$. וכך נקבל כי עבור $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ מתקיים $|f(x)| > M - \varepsilon > 0$, ולכן

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} |f(x)| dx > \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} (M - \varepsilon) dx = (M - \varepsilon) 2\delta > 0$$

בסתירה לנתון. מש"ל.

עכשיו,

$$\langle f, f \rangle = |f(0)|^2 + \int_0^1 |f'(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \wedge \int_0^1 |f'(x)|^2 dx = 0$$

עפ"י הנתון f' רציפה ולכן עפ"י הלמה נובע כי $f' \equiv 0$. עפ"י המשפט היסודי של החדו"א נובע כי $f \equiv 0$.

בסך הכל קיבלנו כי החשודה במכפלה פנימית אכן מכפלה פנימית.

משפט קושי שוורץ

רקע תיאורטי: משפט קושי שוורץ נותן לנו חסם על גודל המכפלה הפנימית בין וקטורים ע"י הנורמות של אותם וקטורים. כלומר

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

$$\text{כאשר } \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

$$\text{דוגמא: ב } \mathbb{R}^n \text{ נקבל כי } |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

1. (שאלה ממבחן) רוצים לעשות קירוב לפונקציה $\sin(x)$ על הקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$ ע"י צירוף לינארי של

שלוש הפונקציות $1, x, \cos(x)$.

א. הסבר איך ניתן לצרף את שלוש הפונקציות $1, x, \cos(x)$ לקבל מערכת אורתוגונלית

e_1, e_2, e_3 ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} w(x) f(x) \overline{g(x)} dx$$

כאשר $w(x)$ היא פונקציית משקל נתונה. הסבר עוד איך ניתן לבנות קירוב ע"י

שימוש במערכת e_1, e_2, e_3 .

פתרון: ע"י תהליך גרם שמידט נהפוך את $1, x, \cos(x)$ למערכת האורתונורמלית

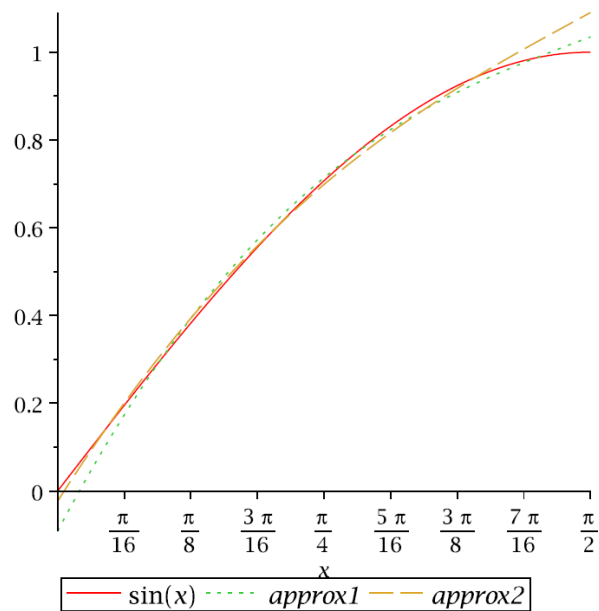
e_1, e_2, e_3 . לאחר מכן הקירוב לפונקציה f יהיה

$$f \sim \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2 + \langle f, e_3 \rangle e_3$$

ב. עשיתי את התרגיל הזה פעמיים, פעם עם פונקציית המשקל $w(x) = \cos(x)$ ופעם

עם פונקציית המשקל $w(x) = \sin(x)$. קיבלתי את הקירובים המופיעים באיור למטה.

איזה קירוב, לדעתך, approx1 (קו הנקודות) או approx2 (הקו השבור), שייך לאיזו פונקציית משקל? נמק.



פתרון: הפונקציה $\cos(x)$ מקבלת 1 בסביבה של 0 ואפס בסביבה של $\frac{\pi}{2}$, לכן נצפה שהדגש במכפלה

הפנימית שהיא יוצרת תהיה סביב הנקודה 0 (approx2). משיקולים דומים נובע כי הדגש במכפלה

הפנימית של $\sin(x)$ יהיה סביב הנקודה $\frac{\pi}{2}$ (approx1).