

תרגיל 8

אי שיוויון בסל

רקע תיאורטי: נניח ואנו רוצים לקרב את הסיגנל שלנו $x(t)$ ע"י מערכת אורתונורמלית (למשל, טור פורייה הקלאסי) כך שנקבל את הקירוב $\tilde{x}(t)$. א"ש בסל נותן לנו למעשה חסם על האנרגיה של האות $\tilde{x}(t)$ בעזרת האנרגיה של האות $x(t)$. כלומר, אם נסמן ב- E את האנרגיה של האות המקורי $x(t)$ וב- $\tilde{E}$ את האנרגיה של האות $\tilde{x}(t)$ אזי מתקיים

$$\tilde{E} \leq E$$

1. יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$. יהי $x \in V$ ותהי $\{e_1, e_2, \dots\}$ מערכת

אורתונורמלית ב- V (סופית או אינסופית). האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \langle x, e_n \rangle$ מתכנס?

פתרון: נראה כי הזנב של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \langle x, e_n \rangle$ שואף ל-0. נבחר $m \geq 1$ אז

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} \langle x, e_n \rangle \right| \leq \sqrt{\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=m}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2}$$

עפ"י א"ש קושי-שוורץ. לכל $x \in V$ ומערכת $\{e_1, e_2, \dots\}$ אורתונורמלית מתקיים

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

נשתמש בא"ש בסל ונקבל

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} \langle x, e_n \rangle \right| \leq \sqrt{\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=m}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2} \leq \sqrt{\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \|x\|$$

הטור $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס ולכן הזנב שלו שואף ל-0, כלומר $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ ומכאן ש

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} \langle x, e_n \rangle \right| = 0$$

ולכן הטור מתכנס.

תהליך גרם שמידט

רקע תיאורטי: לפעמים יהיו בידינו מספר סופי או אינסופי של אותות $\{x_1(t), x_2(t), \dots\}$ בלתי

תלויים כך ש $x(t) \in \text{span}\{x_1(t), x_2(t), \dots\}$. כלומר, ניתן לבטא את האות

$x_i(t)$ כ- $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots$. נשאלת השאלה, מה הם הקבועים c_i ? כאשר האותות $x_i(t)$

הינם אורתונורמליים, התשובה היא פשוטה - $c_i = \langle x(t), x_i(t) \rangle$. לכן נרצה להפוך את האותות $\{x_1(t), x_2(t), \dots\}$ למערכת אורתונורמלית $\{x_1'(t), x_2'(t), \dots\}$ כך ש $\langle x_i'(t), x_j'(t) \rangle = \delta_{ij}$. תהליך זה בו לוקחים אוסף של וקטורים בת"ל $\{v_1, v_2, \dots\}$ והופכים אותם לאורתונורמליים נקרא תהליך גרם שמידט.

2. יהי $X = C^1[0,1]$ מרחב כל הפונקציות הרציפות $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ בעלות נגזרת רציפה על כל הקטע $[0,1]$. נגדיר את המכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx$$

מצאו מערכת אורתונורמלית $\{h_1, h_2, h_3\}$ ב X ביחס למכפלה הפנימית שהוגדרה כך ש

$$\text{span}\{h_1, h_2, h_3\} = \text{span}\{1, x, x^2\}$$

פתרון: אנו למעשה רוצים לבצע גרם שמידט לקבוצת הוקטורים $\{1, x, x^2\}$. באופן כללי,

מתחילים ע"י הפיכת $\{1, x, x^2\}$ לאורתונורמליים. באופן כללי, אם $\{v_k\}$ הם הוקטורים שלהם אנו

רוצים לעשות אורתונורמליזציה על מנת לקבל את $\{e_k\}$ אזי

$$e_1 = v_1$$

$$e_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i$$

במקרה שלנו,

$$e_1 = 1$$

$$e_2 = x - \frac{\langle x, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1$$

$$\|e_1\|^2 = \langle e_1, e_1 \rangle = \langle 1, 1 \rangle$$

$$= 1(0) \cdot 1(0) + \int_0^1 1' \cdot 1' dx = 1$$

$$\langle x, e_1 \rangle = \langle x, 1 \rangle = x \Big|_{x=0} \cdot 1 \Big|_{x=0} + \int_0^1 x' \cdot 1' dx = 0$$

נציב ונקבל כי $e_2 = x$.

$$e_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle x^2, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2$$

$$\langle x^2, e_1 \rangle = \langle x^2, 1 \rangle = x^2 \Big|_{x=0} \cdot 1 \Big|_{x=0} + \int_0^1 (x^2)' \cdot 1' dx = 0 + 0 = 0$$

$$\langle x^2, e_2 \rangle = \langle x^2, x \rangle = x^2 \Big|_{x=0} x \Big|_{x=0} + \int_0^1 (x^2)' x' dx = \int_0^1 2x dx = 1$$

$$\|e_2\|^2 = \langle x, x \rangle = x \Big|_{x=0} x \Big|_{x=0} + \int_0^1 (x)' (x)' dx = 1$$

נציב ונקבל

$$e_3 = x^2 - x$$

נעת נשאר לנרמל את האיברים e_1, e_2, e_3 . את $\|e_1\|$ ו $\|e_2\|$ כבר חישבנו. נשאר לחשב את $\|e_3\|$:

$$\langle e_3, e_3 \rangle = \langle x^2 - x, x^2 - x \rangle = x^2 - x \Big|_{x=0} x^2 - x \Big|_{x=0} + \int_0^1 (x^2 - x)' (x^2 - x)' dx = \int_0^1 (2x - 1)^2 dx$$

$$= \frac{1}{6} (2x - 1)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

ולכן $\|e_3\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, מכאן נקבל

$$h_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = 1, h_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = x, h_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \sqrt{3}(x^2 - x)$$

ההטלה אורתוגונלית והקירוב הטוב ביותר

רקע תיאורטי: הרבה פעמים (בעיקר בתקשורת ספרתית) תצטרכו לשדר אות מסויים עם מספר מוגבל של אותות. למשל, אם המשדר שלכם יודע לשדר רק $\cos(2x), \sin(3x), 5, \sin(9x)$ באמפליטודות שונות אזי לא תוכלו כמובן לשדר כל אות בקטע $[-\pi, \pi]$. אף על פי כן, תרצו לשדר קירוב טוב ביותר של האות במובן של מינימום אנרגיה של השגיאה. כלומר, נרצה להביא למינימום את הביטוי הבא:

$$\|\mathcal{E}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \alpha \cos(2t) - \beta \sin(3t) - \gamma 5 - \delta \sin(9t)|^2 dt$$

עקרון הקירוב הטוב ביותר אומר כי קיימ צירוף יחיד של $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ אשר יביא את הביטוי למינימום, זהו הקירוב הטוב ביותר.

1. הפונקציה $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $\phi(x, y) = \int_{-1}^{t^{200} - x - yt} dt$, מצאו נקודה

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ כך ש $\phi(x_0, y_0) \leq \phi(x, y)$ לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

פתרון: על המרחב $C[-1,1]$ נגדיר את המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ אז

המערכת $\{1, t\}$ היא אורתוגונלית לפי המכפלה הפנימית שהוגדרה כי $\phi(x, y) = \|t^{200} - x - yt\|^2$

. אך אבוי! המערכת איננה אורתונורמלית! לכן ננרמל את האיברים של מערכת זו. $\langle 1, t \rangle = \int_{-1}^1 t dt = 0$

$$\|1\|^2 = \int_{-1}^1 1 dt = 2 \Rightarrow \|1\| = \sqrt{2}$$

$$\|t\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \|t\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

לכן המערכת $\left\{ \frac{1}{\|1\|}, \frac{t}{\|t\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}t \right\}$ היא אורתונורמלית ולכן המינימום של הביטוי

$$\left\| t^{200} - \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - \alpha_2 \sqrt{\frac{3}{2}}t \right\|$$

מתקבל כאשר

$$\alpha_1 = \left\langle t^{200}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \int_{-1}^1 \frac{t^{200}}{\sqrt{2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{201}$$

$$\alpha_2 = \left\langle t^{200}, \sqrt{\frac{3}{2}}t \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t^{201} dt = 0$$

לכן המינימום שווה ל $\left\| t^{200} - \frac{\sqrt{2}}{201} \frac{1}{\sqrt{2}} \right\|$. ואם נשווה זאת לביטוי $\|t^{200} - x - yt\|$ נקבל ש

$$. x = \frac{\sqrt{2}}{201} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{201}, y = 0$$

שאלה: האם תקבלו קירוב טוב יותר אם תוכלו להשתמש בקירוב של t^{200} בפונקציה $100t + \frac{1}{2}$?