

אנליזה הרמונית תרגיל 9

התמרת פורייה

רקע תיאורטי : עד עכשיו דיברנו על איך ניתן לייצג פונקציות ה"חיות" על קטע חסום וסגור בין היתר ע"י טור פוריה. הסברנו שהמקדמים a_n, b_n מייצגים את המשקל של כל תדר ושהתדרים שלנו הם שלמים ($\sin 3x$ מייצג את התדר 3). השאלה איך מייצגים פונקציות ש"חיות" על כל הממשיים? התמרת פורייה הינה למעשה ההכללה של טורי פורייה עבור פונקציות שמוגדרות על כל הישר.

תזכורת: עבור כל פונקציה אינטגרבילית בהחלט ורציפה למקוטעין (נסמן את אוסף הפונקציות הללו ב $G(\mathbb{R})$).

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$$

בסיסיות :

- א. $F(\omega)$ מוגדר לכל $\omega \in \mathbb{R}$.
- ב. F היא פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}$.
- ג. $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(\omega) = 0$.

1. איזו פונקציה בוודאות לא יכולה להיות התמרת פורייה של פונקציה ב $G(\mathbb{R})$?

- א. $\frac{1}{1+\omega^2}$
- ב. $\frac{\omega^3}{1+\omega^4}$
- ג. $e^{\frac{-\omega^2}{1+\omega^2}}$
- ד. $\frac{\sin(\pi\omega)}{\omega + \omega^2}$

פתרון: הפונקציה $e^{\frac{-\omega^2}{1+\omega^2}}$ איננה דועכת לאפס באינסוף, אכן $\lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{\frac{-\omega^2}{1+\omega^2}} = e^{-1} \neq 0$ ולכן פונקציה זו איננה

התמרת פורייה של פונקציה ב $G(\mathbb{R})$.

תזכורת: אם $x^n f(x) \in G(\mathbb{R})$ עבור איזשהו $n \in \mathbb{N}$ אזי מתקיים $\widehat{(x^n f)}(\omega) = \left(i \frac{\partial}{\partial \omega}\right)^n \hat{f}$

2. כמה פעמים גזירה פונקצית ההתמרה של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$?

פתרון: נשתמש בנוסחת המומנטים $\widehat{(x^n f)}(\omega) = \left(i \frac{\partial}{\partial \omega}\right)^n \hat{f}$. לכן מספר הפעמים ש $\hat{f}$ גזירה

שווה למספר n הגדול ביותר $x^n f \in G(\mathbb{R})$, כלומר $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^2} dx < \infty$. כיוון ש

$\int_1^{\infty} x^{n-4} dx < \infty$ אם ורק אם $x^n \in G(\mathbb{R})$ נובע ש $(1+x^2)^2 \sim x^4$ כלומר $n-4 < -1$ ולכן $n < 3$

והמספר n הגדול ביותר המקיים $n < 3$ $n=2$ ולכן f גזירה בדיוק פעמיים.

תזכורת: (שוויון פלאנשרל) אם $f \in G(\mathbb{R})$ ו- $f \in L^2$ אז

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

3. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du$.

פתרון: ידוע שהתמרת פורייה של $e^{-|x|}$ נתונה לפי $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

ראינו כי אם f פונקציה רציפה כך ש $f, f' \in G(\mathbb{R})$ ו $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ אזי מתקיים כי

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f](\omega)$$

נגזור את $e^{-|x|}$, ניקח התמרת פוריה של הנגזרת ונקבל

$$\widehat{(-\operatorname{sgn}(x)e^{-|x|})}(\omega) = \left(\widehat{e^{-|x|}}\right)' = \frac{i\omega}{\pi(1+\omega^2)}$$

נשתמש בשוויון פלאנשרל ונקבל

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| -\operatorname{sgn}(x) e^{-|x|} \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{i\omega}{\pi(1+\omega^2)} \right| d\omega$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\pi^2(1+\omega^2)^2} d\omega$$

כלומר,

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{(1+\omega^2)} d\omega = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} dx = \frac{\pi}{2}$$