

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי
עזר אסורים או יתפס בהעתקה
יענש בחומרה עד כדי הרחקתו
מהאוניברסיטה.

שאלון בחינה בקורס: אנליזה הרמונית (83-210-01-01)
מרצה: פרופ' מרק אגרנובסקי
סמסטר א', מועד א' תש"ע: א' באדר תש"ע (15.2.2010)
משך הבחינה: 150 דקות.

שאלות

1. בנה טור פוריה של הפונקציה $f(x) = \sin x$

a. בקטע $[-\pi, \pi]$

b. בקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

בנקודה $x_0 = \frac{\pi}{2}$?

c. מה הסכום של טור פוריה $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

2. בנה טור פוריה של $\cos x$ לפי סינוסים בקטע $[0, \pi]$

3. a. בנה טור פוריה מרוכב של e^{2ix} , $x \in [-\pi, \pi]$

b. בנה טור פוריה מרוכב של $\frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{ix}}$, $x \in [-\pi, \pi]$

c. מה המקדם פוריה $\hat{f}_{10}$ כאשר $f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{2i(x-y)}}{1 - \frac{1}{3}e^{iy}} dy$?

4. יהי H מרחב הילברט - $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית.

a. לכל $x \in H$ כתב אי שוויון Bessel.

b. נסח התנאי הנוסף כ'דא' ש E תהי בסיס הילברט.

c. מצא כל המספרים $\alpha \in \mathbb{R}$ כך שקיים $x \in H$ עם $\langle x, e_k \rangle = [1 + (3 + 2k + k^3)^{\alpha}]^{-1}$; $k = 1, 2, \dots$, $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ בסיס ב H

5. מצא כל המספרים $\alpha \in \mathbb{R}$ אם ההתמרת פוריה: $f \in L^1(\mathbb{R})$ כך קיימת

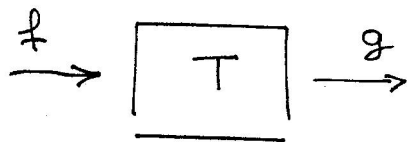
$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2 + \omega^3}, & \omega > 0 \\ \frac{\beta}{3 + \omega^2}, & \omega \leq 0 \end{cases}$$

6. פתור המשוואה $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)dy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ בשביל $f \in L^1(\mathbb{R})$

7. a. מצא התמרת פוריה של $x e^{-\frac{x^2}{2}}$ (גשגשוש / גמגמו / כולל, $e^{-\frac{x^2}{2}}$)

b. כמה פעמים דיפרנציאבילית ברציפות התמרת פוריה של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x^{10}}$?

8. בנה low-pass מסנן T אידיאלי עם הרחב ספקרלי ω_0 :



כתוב נוסחה ל- g

בהצלחה!

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$