

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשבון מדעי.

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) (8 נקודות) מצא את טור הפוריה על הקטע $[0, 2]$ של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

צייר גרף של סכום הטור עבור $0 \leq x \leq 12$.

(ב) (8 נקודות) מצא את טור הפוריה על הקטע $[0, 4]$ של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

צייר גרף של סכום הטור עבור $0 \leq x \leq 12$.

(ג) (9 נקודות) מצא את טור הסינוסים על הקטע $[0, 2]$ של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

צייר גרף של סכום הטור עבור $0 \leq x \leq 12$.

2. מצא את טור הפוריה המרוכב, על הקטע $[-\pi, \pi]$, של הפונקציה

$$f_{q,h}(x) = \begin{cases} 1 & q-h < x < q+h \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאן q, h הם קבועים, עם $-\pi < q < \pi$, $h > 0$ ו- $|q| + h < \pi$ (כך שהקטע $[q-h, q+h]$ הוא תת-קטע של $(-\pi, \pi)$).

העזר בשיויון פרסבל הכללי (שאם טור הפוריה של $f(x)$ הוא $\sum c_n e^{inx}$ וטור הפוריה של $g(x)$ הוא $\sum d_n e^{inx}$ אזי

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = 2\pi \sum c_n \overline{d_n} \right)$$

להוכיח ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 hn \cos qn}{n^2} = \frac{\pi}{4} \max(2h - |q|, 0) - \frac{h^2}{2}$$

(רמז: בחר את שתי הפונקציות בפרסבל להיות $f_{0,h}(x)$ ו- $f_{q,h}(x)$).

מצא גם את הסכום

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin hn \sin h'n}{n^2}$$

עבור $0 \leq h, h' < \pi$.

3. (א) (4 נקודות) הסבר למה

$$\langle f, g \rangle = C_1 \int_{-1}^0 f(x) \overline{g(x)} dx + C_2 \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

הוא מכפלה פנימית על המרחב של פונקציות רציפות על $[-1, 1]$ אם ורק אם $C_1, C_2 > 0$.

(ב) (4 נקודות) הוכח ששתי הפונקציות $p_1(x) = x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ ו- $p_2(x) = x - \frac{1}{\sqrt{3}}$ הן אורתוגונליות לכל בחירה של $C_1, C_2 > 0$.

(ג) (10 נקודות) מצא את היחס בין C_1 ו- C_2 אם נתון שהפונקציה $p_3(x) = 22x^2 - 2x - 7$ היא אורתוגונלית גם ל- $p_1(x)$ וגם ל- $p_2(x)$. במקרה זה מצא פולינום $p_4(x)$ מדרגה 3 שהוא אורתוגונלי לכל הפולינומים $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$.

(ד) (7 נקודות) מהו התנאי על C_1, C_2 כך ש-

$$\langle f, g \rangle = C_1 \int_{-1}^0 f(x) \overline{g(x)} dx + C_2 \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

הוא מכפלה פנימית על המרחב של פולינומים מדרגה לא יותר מ-3?

4. (א) (6 נקודות) מצא את התמרות הפוריה של הפונקציות

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

(ב) (6 נקודות) הוכח שניתן לכתוב את הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} ax + b & d - c < x < d + c \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

בצורה

$$g(x) = (ad + b)f_1\left(\frac{x-d}{c}\right) + acf_2\left(\frac{x-d}{c}\right)$$

כאן a, b, c, d הם קבועים כלשהם, עם $c > 0$.

(ג) (6 נקודות) העזר בסעיף הקודם לחשב את התמרת הפוריה של $g(x)$. הערה: אין לחשב אף אנטגרל, יש לנצל את הסעיף הקודם.

(ד) (7 נקודות) העזר בסעיף הקודם למצוא את ההתמרה של

$$h(x) = \begin{cases} C + x & -C < x < -D \\ C - D & -D < x < D \\ C - x & D < x < C \\ 0 & |x| \geq C \end{cases}$$

כאשר $0 < D < C$.

5. אם התמרת הפוריה הבדידה של הסדרה $\{f_n\}_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$ היא הסדרה $\{F_m\}_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$, הוכח שהתמרת הפוריה הבדידה של הסדרה $\{h_n\}_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$, המוגדרת על ידי

$$h_n = f_{n+1 \bmod N} - 2f_n + f_{n-1 \bmod N}$$

היא $\{H_m\}_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$, כאשר

$$H_m = -4 \sin^2 \frac{\pi m}{N} \cdot F_m$$

אם $f_n = n^2$, עבור $n = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$, מצא, לפי הסדר, את $\{h_n\}$, את $\{H_m\}$ ואת $\{F_m\}$.

בהצלחה!