

זמן המבחן: שעה וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. מצא את טור הפוריה של הפונקציה

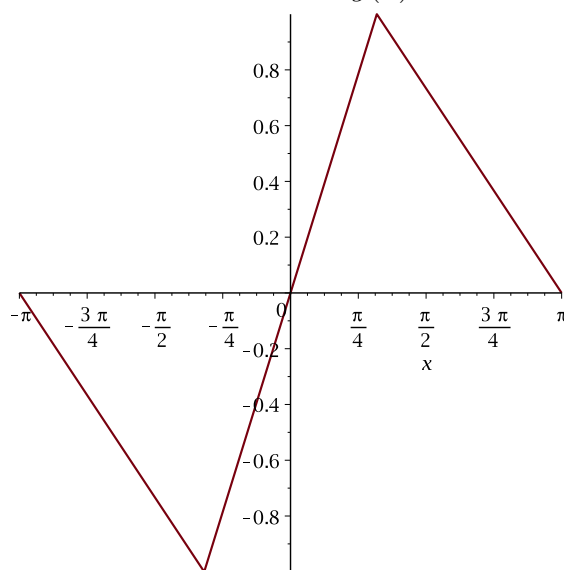
$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{x+\pi}{a-\pi} & -\pi \leq x \leq -a \\ \frac{x}{a} & -a < x < a \\ \frac{x-\pi}{a-\pi} & a \leq x \leq \pi \end{cases}$$

כאשר a הוא קבוע עם $0 < a < \pi$. (ראה איור למטה במקרה $a = 1$.)

על ידי שימוש בשיויון פרסבל הוכח ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^4} = \frac{a^2(\pi - a)^2}{6}$$

מצא את $g(x) = \lim_{a \rightarrow 0} f_a(x)$ ואת טור הפוריה של $g(x)$. האם טור הפוריה של $f_a(x)$ מתכנס במידה שווה? האם טור הפוריה של $g(x)$ מתכנס במידה שווה?



2. מצא את טור הקוסינוסים של הפונקציה

$$f(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

על ידי גזירה ואנטגרציה של הטור שמצאת, מצא גם טורי סינוסים לפונקציות

$$g(x) = \cos x, \quad h(x) = \cos x + \frac{2x}{\pi} - 1$$

איזה משני הטורים האלה מתכנס במידה שווה?

3. הוכח שהפונקציות

$$e_1 = 1, \quad e_2 = x - \frac{1}{2}, \quad e_3 = x^2 - x + \frac{1}{5}$$

הם אורתוגונליים ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)x(1-x) dx$$

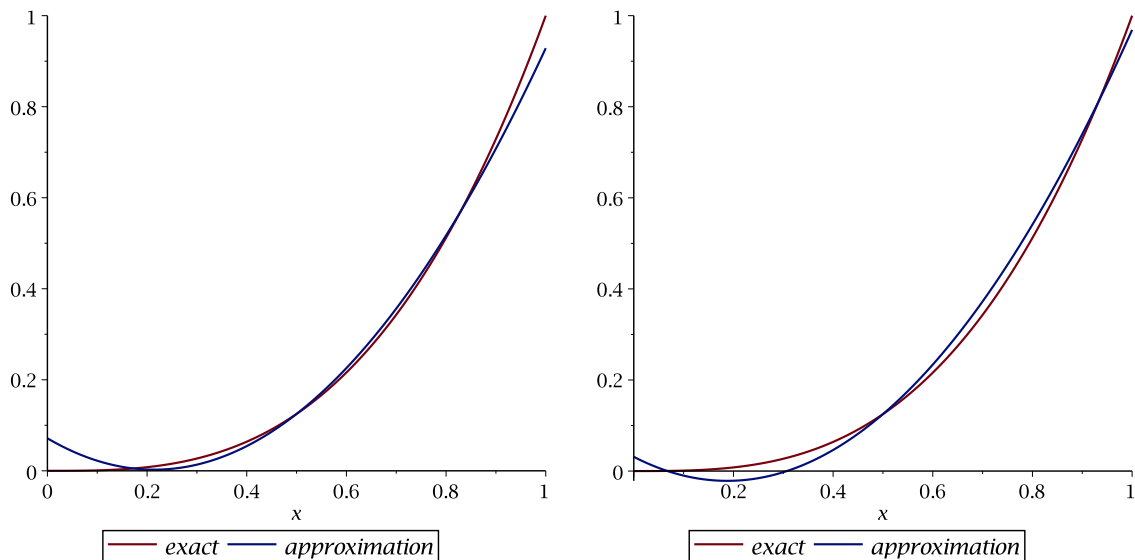
מצא את מקדמי הפוריה של הפונקציה $f(x) = x^3$ ביחס למערכת האורתוגונלית הזו, ואת ההטלה האורתוגונלית של פונקציה זו למרחב הפרוס על ידי e_1, e_2, e_3 .

$$(\langle e_3, e_3 \rangle = \frac{1}{2100}, \langle e_2, e_2 \rangle = \frac{1}{120})$$

עשיתי דבר דומה אך עם המכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

למטה מופיעים גרפים של הפונקציה x^3 עם ההטלה בשני המקרים. לדעתכם, איזה גרף שייך לאיזה מכפלה פנימית ?



4. לפונקציה $f_a(x)$ יש התמרת פוריה

$$F_a(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega < -\pi \\ \frac{\omega+\pi}{a-\pi} & -\pi \leq \omega \leq -a \\ \frac{\omega}{a} & -a < \omega < a \\ \frac{\omega-\pi}{a-\pi} & a \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega > \pi \end{cases}$$

כאשר a הוא קבוע עם $0 < a < \pi$. (ראה איור בעמוד הבא במקרה $a = 1$.)

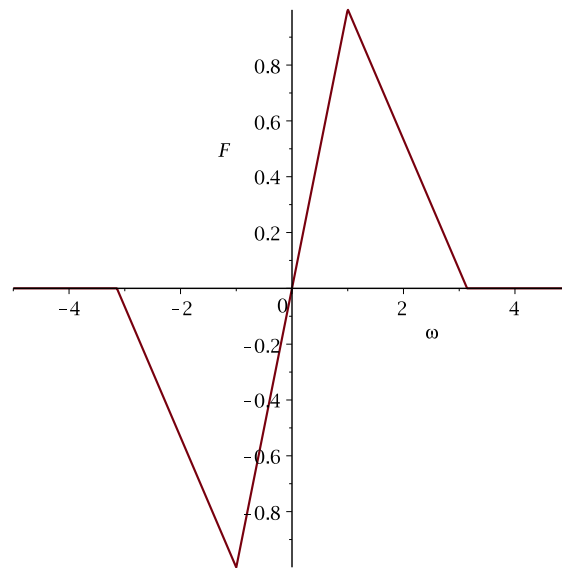
מצא את $f_a(x)$.

הראה שכאשר n הוא שלם

$$f_a(n) = \begin{cases} \frac{2i\pi \sin an}{an^2(\pi-a)} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

והעזר במשפט הדגימה של שנון להראות שאם x אינו שלם אזי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin an}{n(x^2 - n^2)} = \frac{\pi}{2x^2} \left(\frac{\sin ax}{\sin \pi x} - \frac{a}{\pi} \right)$$



5. ניתן לענות על שני הסעיפים בכל סדר, ואולי עדיף קודם לענות על הסעיף שני.

(א) בהנתן סדרה מחזורית $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ עם מחזור זוגי N , (כלומר: $f_{n+N} = f_n$ לכל n), מגדירים סדרה מחזורית חדשה $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ על ידי

$$g_n = af_{n+1} + bf_n + af_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

כאשר a ו- b הם קבועים.

אם התמורת הפוריה הדיסקרטית של הסדרה $\{f_n\}_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$ היא $\{F_m\}_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$, מצא את התמורת הפוריה הדיסקרטית של $\{g_n\}_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$, $\{G_m\}_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$.
 הוכח שאם $b > 2|a|$ אזי ניתן למצוא את הסדרה $\{f_n\}$ בהנתן הסדרה $\{g_n\}$.
 (ב) בהנתן פונקציה גזירה פעמיים $f(x)$ מגדירים פונקצייה חדשה $g(x)$ על ידי

$$g(x) = af''(x) + bf(x)$$

כאשר a ו- b הם קבועים.

אם התמורות הפוריה של $f(x)$ ו- $g(x)$ הן $F(\omega)$ ו- $G(\omega)$, איך ניתן למצוא את G בהנתן F ?
 מהו התנאי על הקבועים a, b כך שניתן למצוא את F בהנתן G ?

בהצלחה!