

זמן המבחן: שעה וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. מצא את טור הפוריה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} a \left(\frac{2x}{\pi} + 1 \right) & -\pi \leq x \leq 0 \\ \cos x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

עבור איזה ערך של a הטור מתכנס במידה שווה ?

לפי התאוריה הכללית של התכנסות של טורי פוריה, מהו הסכום של הטור כאשר $x = \pi$? בדוק באופן מפורש שאכן הטור מתכנס לערך זה כאשר $x = \pi$.

2. לפונקציה $f(x)$ המוגדרת על הקטע $-1 < x < 5$ יש טור פוריה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi n x / 3}$$

ניתן להניח שהטור מתכנס ל- $f(x)$ בכל מובן סביר.

(א) מהו טור הפוריה של $g(x) = f(x) + f(x + 3 \bmod 6)$?

(ב) איך ניתן לכתוב, במונחים של $f(x)$, את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n - c_{n-1}|^2$? יש לכתוב בצורה שלא מופיע בו i ! רמז: פרסבל - אבל לאיזה פונקציה?

(ג) לאיזה פונקציה מתכנס טור הסינוסים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}(c_n) \sin \frac{n\pi x}{3}$?

3. מהו טור פוריה-לז'נדר של פונקציה $f(x)$ המוגדרת על הקטע $-1 \leq x \leq 1$? באיזה מובן טור פוריה-לז'נדר סופי נותן את הקירוב הכי טוב לפונקציה המוגדרת על הקטע ?

מצא את הפולינום מדרגה 5 שהוא הקירוב הכי טוב במובן זה לפונקציה $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$. אנטגרלים רלוונטיים:

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \sin x - x \cos x \\ \int x^3 \sin x \, dx &= (3x^2 - 6) \sin x + (6x - x^3) \cos x \\ \int x^5 \sin x \, dx &= (120 + 5x^4 - 60x^2) \sin x + (20x^3 - x^5 - 120x) \cos x \end{aligned}$$

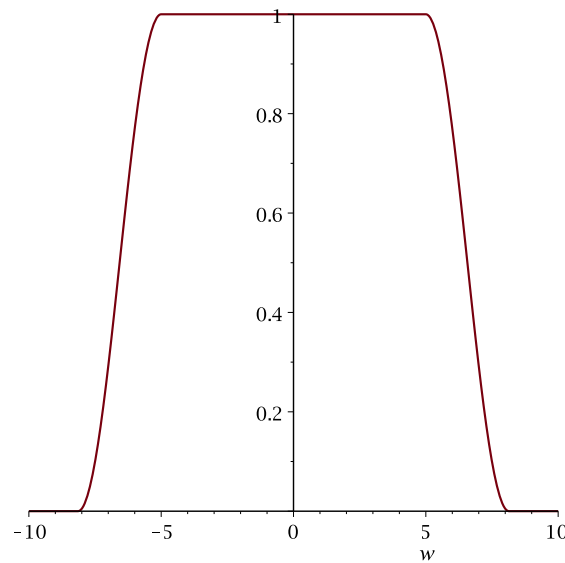
4. לפונקציה $f_a(x)$ יש התמרת פוריה

$$F_a(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega < -a - \pi \\ \frac{1}{2}(1 + \cos(\omega + a)) & -a - \pi < \omega < -a \\ 1 & |\omega| < a \\ \frac{1}{2}(1 + \cos(\omega - a)) & a < \omega < a + \pi \\ 0 & \omega > a + \pi \end{cases}$$

כאשר a הוא קבוע חיובי. (ראה איור למטה במקרה $a = 5$.)

מצא את $f_a(x)$.

אם $g(x)$ היא פונקציה כל שהיא עם התמרה $G(\omega)$, מהיא ההתמרה של $f_a * g(x)$ ומהיא המשמעות של קונבולוציה זו?



5. אם התמרת הפוריה הדסקרטית של האות f_{-1}, f_0, f_1, f_2 היא F_{-1}, F_0, F_1, F_2 , מצא את התמרת הפוריה הדסקרטית של האות

$$\frac{1}{2}(f_2 + f_{-1}), f_{-1}, \frac{1}{2}(f_{-1} + f_0), f_0, \frac{1}{2}(f_0 + f_1), f_1, \frac{1}{2}(f_1 + f_2), f_2$$

באופן יותר כללי, אם ההתמרה של האות $\{f_n\}_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$ היא $\{F_m\}_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$, מצא את ההתמרה של האות $\{g_n\}_{n=-N+1}^N$ הנתון על ידי

$$g_n = \begin{cases} f_{n/2} & n \text{ זוגי} \\ \frac{1}{2}(f_{(n-1)/2 \bmod N} + f_{(n+1)/2}) & n \text{ אי זוגי} \end{cases}$$

בהצלחה!