

זמן המבחן: שעה וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. מצא את טור הפוריה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} a \left(\frac{2x}{\pi} + 1 \right) & -\pi \leq x \leq 0 \\ \cos x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

עבור איזה ערך של a הטור מתכנס במידה שווה ?

לפי התאוריה הכללית של התכנסות של טורי פוריה, מהו הסכום של הטור כאשר $x = \pi$? בדוק באופן מפורש שאכן הטור מתכנס לערך זה כאשר $x = \pi$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(a \int_{-\pi}^0 \left(\frac{2x}{\pi} + 1 \right) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} \cos x \cos nx \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(a \left[\frac{1}{n} \left(\frac{2x}{\pi} + 1 \right) \sin nx + \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(n+1)x + \cos(n-1)x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2a}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{4a}{\pi^2 n^2} & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even} \end{cases} \end{aligned}$$

כאן הנחתי $n \neq 0, 1$. כאשר $n = 0$ יש צורך לחשב מחדש את האנטגרל הראשון, אבל עדיין התשובה היא 0. כאשר $n = 1$ יש צורך לחשב שוב את האנטגרל השני שיתן תרומה במקרה הזה $\frac{1}{2}$. ולכן התשובה הסופית היא:

$$a_n = \begin{cases} \frac{4a}{\pi^2} + \frac{1}{2} & n = 1 \\ \frac{4a}{\pi^2 n^2} & n \neq 1 \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(a \int_{-\pi}^0 \left(\frac{2x}{\pi} + 1 \right) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} \cos x \sin nx \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(a \left[-\frac{1}{n} \left(\frac{2x}{\pi} + 1 \right) \cos nx + \frac{2}{\pi n^2} \sin nx \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(n+1)x + \sin(n-1)x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{a}{n} (-1 - (-1)^n) + \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{2n}{n^2-1} - \frac{2a}{\pi n} & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases} \end{aligned}$$

כאן הנחתנו $n \neq 1$ (אין מקדם b_0 !) כאשר $n = 1$ האנטגרל השני עדיין מתאפס ולכן אין שינוי. ולכן טור פורייה של $f(x)$:

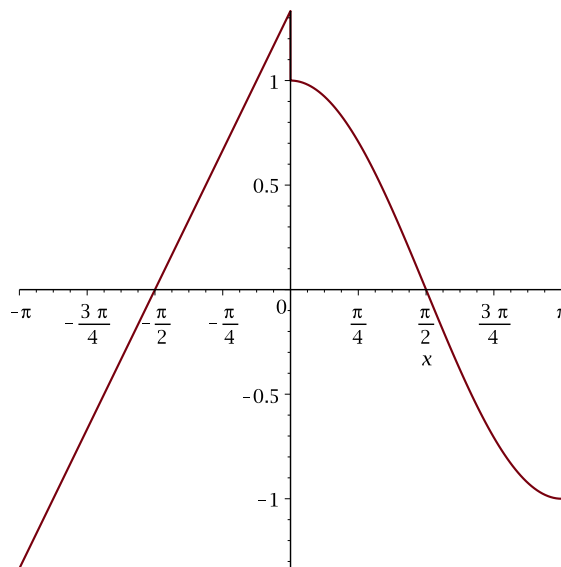
$$\left(\frac{4a}{\pi^2} + \frac{1}{2}\right) \cos x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4a}{\pi^2(2r+1)^2} \cos(2r+1)x + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{4r}{(4r^2-1)\pi} - \frac{a}{\pi r}\right) \sin 2rx$$

יש לנו

$$f(-\pi) = -a, \quad f(0) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad f(\pi) = -1$$

ולכן ההכללה המחזורית של f היא רציפה אם ורק אם $a = 1$. ראה גרף של הפונקציה למטה במקרה $a = \frac{4}{3}$. במקרה $a = 1$, ורק במקרה זה, טור הפוריה יתכנס במידה שווה. והטור במקרה זה הוא

$$\left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\right) \cos x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2r+1)^2} \cos(2r+1)x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin 2rx}{(4r^2-1)\pi r} \sin 2rx$$



במקרה הכללי, סכום הטור כאשר $x = \pm\pi$ יהיה $\frac{1}{2}(f(\pi) + f(-\pi)) = -\frac{1}{2}(1+a)$. כאשר מציבים $x = \pm\pi$, בטור כל הסינוסים הם 0, ונשאר

$$\left(\frac{4a}{\pi^2} + \frac{1}{2}\right) \cos \pi + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4a}{\pi^2(2r+1)^2} \cos(2r+1)\pi = -\frac{1}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^2}\right)$$

זה אכן שווה $-\frac{1}{2}(1+a)$ אם

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

שזה תוצאה שראינו בשיעור.

2. לפונקציה המרוכבת $f(x)$ המוגדרת על הקטע $-1 < x < 5$ יש טור פוריה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi n x/3}$$

ניתן להניח שהטור מתכנס ל- $f(x)$ בכל מובן סביר.

- (א) מהו טור הפוריה של $g(x) = f(x) + f(x + 3 \bmod 6)$?
- (ב) איך ניתן לכתוב, במונחים של $f(x)$, את הסכום $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n - c_{n-1}|^2$? יש לכתוב בצורה שלא מופיע בה i ! רמז: פרסבל - אבל לאיזה פונקציה?
- (ג) לאיזה פונקציה מתכנס טור הסינוסים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}(c_n) \sin \frac{n\pi x}{3}$?

נגדיר את $\tilde{f}(x)$ להיות ההכללה המחזורית ומנורמלת של $f(x)$ כך ש-

$$\tilde{f}(x) = \sum c_n e^{\pi i n x / 3}$$

(א) טור הפוריה של $g(x)$ הוא

$$\sum c_n e^{\pi i n x / 3} + \sum c_n e^{\pi i n (x+3) / 3} = \sum (1 + (-1)^n) c_n e^{\pi i n x / 3} = \sum_{n \text{ even}} 2c_n e^{\pi i n x / 3}$$

(ב) יש לנו ש-

$$\sum (c_n - c_{n-1}) e^{\pi i n x / 3} = \tilde{f}(x) - \sum c_n e^{\pi i (n+1) x / 3} = (1 - e^{\pi i x / 3}) \tilde{f}(x)$$

ולכן על ידי שיויון פרסבל

$$\sum |c_n - c_{n-1}|^2 = \frac{1}{6} \int_{-1}^5 |f(x)|^2 |1 - e^{\pi i x / 3}|^2 dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^5 |f(x)|^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{6} \right) dx$$

(ג) שים לב ש-

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x) = \sum c_n (e^{\pi i n x / 3} - e^{-\pi i n x / 3}) = \sum 2i c_n \sin \frac{n\pi x}{3}$$

ולכן הטור $\sum \operatorname{Im}(c_n) \sin \frac{n\pi x}{3}$ מתכנס ל-

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)}{2i} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\tilde{f}(-x) - \tilde{f}(x))$$

3. מהו טור פוריה-לז'נדר של פונקציה $f(x)$ המוגדרת על הקטע $-1 \leq x \leq 1$? באיזה מובן טור פוריה-לז'נדר סופי נותן את הקירוב הכי טוב לפונקציה המוגדרת על הקטע ?

מצא את הפולינום מדרגה 5 שהוא הקירוב הכי טוב במובן זה לפונקציה $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$. אנטגרלים רלוונטיים:

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= \sin x - x \cos x \\ \int x^3 \sin x \, dx &= (3x^2 - 6) \sin x + (6x - x^3) \cos x \\ \int x^5 \sin x \, dx &= (120 + 5x^4 - 60x^2) \sin x + (20x^3 - x^5 - 120x) \cos x \end{aligned}$$

טור פוריה לז'נדר של פונקציה $f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

. אם מחפשים פולינום $P_N(x)$ מדרגה N כל ש

$$\int_{-1}^1 |f(x) - P_N(x)|^2 dx$$

היא מינימלית, התשובה היא $P_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x)$

אם $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ היות והפונקציה היא איזוגית, כל המקדמים a_n מתאפסים כאשר n זוגי, וכאשר n איזוגי

$$a_n = (2n + 1) \int_0^{\pi} f(x) P_n(x) dx$$

ולכן:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \int_0^1 x \sin \frac{\pi x}{2} dx \\ &= \frac{12}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} y \sin y dy \\ &= \frac{12}{\pi^2} [\sin y - y \cos y]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{12}{\pi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 7 \int_0^1 \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) \sin \frac{\pi x}{2} dx \\ &= \frac{35}{2} \int_0^1 x^3 \sin \frac{\pi x}{2} dx - \frac{7}{2} a_1 \\ &= \frac{280}{\pi^4} \int_0^{\pi/2} y^3 \sin y dy - \frac{7}{2} \frac{12}{\pi^2} \\ &= \frac{280}{\pi^4} [(3y^2 - 6) \sin y + (6y - y^3) \cos y]_0^{\pi/2} - \frac{42}{\pi^2} \\ &= \frac{280}{\pi^4} \left(\frac{3\pi^2}{4} - 6\right) - \frac{42}{\pi^2} \\ &= \frac{168}{\pi^2} - \frac{1680}{\pi^4} \\ &= \frac{168}{\pi^2} \left(1 - \frac{10}{\pi^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= 11 \int_0^1 \left(\frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x\right) \sin \frac{\pi x}{2} dx \\ &= \frac{693}{8} \int_0^1 x^5 \sin \frac{\pi x}{2} dx - \frac{11}{2} a_3 - \frac{99}{8} a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{693.2^3}{\pi^6} \int_0^{\pi/2} y^5 \sin y \, dy - \frac{11.84}{\pi^2} \left(1 - \frac{10}{\pi^2}\right) - \frac{297}{2\pi^2} \\
&= \frac{693.2^3}{\pi^6} \left[\left(120 + 5y^4 - 60y^2\right) \sin y + \left(20y^3 - y^5 - 120y\right) \cos y \right]_0^{\pi/2} - \frac{10.11.84}{\pi^4} - \frac{11.195}{2\pi^2} \\
&= \frac{693.2^3}{\pi^6} \left(120 + \frac{5\pi^4}{16} - 15\pi^2\right) - \frac{10.11.84}{\pi^4} - \frac{11.195}{2\pi^2} \\
&= \frac{665280}{\pi^6} - \frac{92400}{\pi^4} + \frac{660}{\pi^2} \\
&= \frac{660}{\pi^2} \left(\frac{1008}{\pi^4} - \frac{140}{\pi^2} + 1 \right)
\end{aligned}$$

והקירוב הוא

$$a_1 x + a_3 \left(\frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right) + a_5 \left(\frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x \right)$$

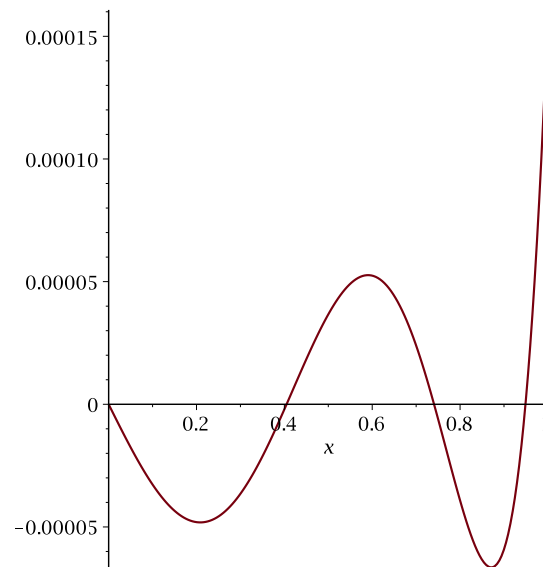
עד כאן לפתרון השאלה. הערכים המספריים של המקדמים הם בערך

$$a_1 \approx 1.21585, a_3 \approx -0.22489, a_5 \approx 0.00920$$

והפולינום הוא בערך

$$1.570436x - 0.642705x^3 + 0.072430x^5$$

הגרפים של הפולינום ושל $\sin \frac{\pi x}{2}$ על הקטע $[-1, 1]$ ממש דומים וההפרש ביניהם בקטע $[0, 1]$ מופיע בגרף למטה:



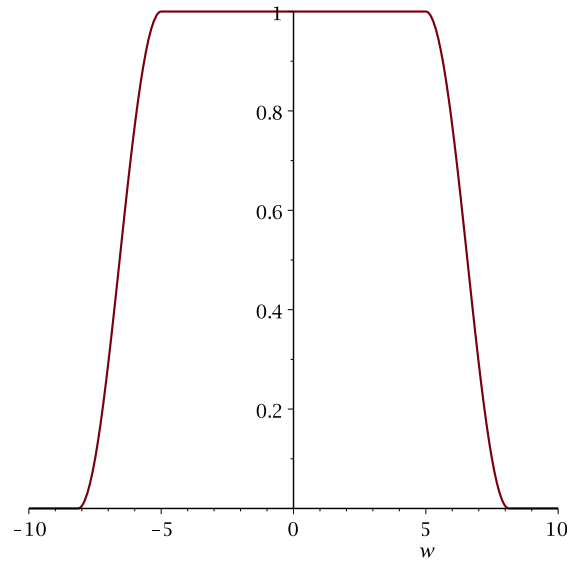
4. לפונקציה $f_a(x)$ יש התמרת פוריה

$$F_a(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega < -a - \pi \\ \frac{1}{2}(1 + \cos(\omega + a)) & -a - \pi < \omega < -a \\ 1 & |\omega| < a \\ \frac{1}{2}(1 + \cos(\omega - a)) & a < \omega < a + \pi \\ 0 & \omega > a + \pi \end{cases}$$

כאשר a הוא קבוע חיובי. (ראה איור למטה במקרה $a = 5$.)

מצא את $f_a(x)$.

אם $g(x)$ היא פונקציה כל שהיא עם התמרה $G(\omega)$, מהיא ההתמרה של $f_a * g(x)$ ומהיא המשמעות של קונבולוציה זו ?



$$\begin{aligned}
 f_a(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_a(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-a-\pi}^{-a} \frac{1}{2} (1 + \cos(\omega + a)) e^{i\omega x} d\omega + \int_{-a}^a e^{i\omega x} d\omega + \int_a^{a+\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos(\omega - a)) e^{i\omega x} d\omega \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \frac{1}{2} (1 + \cos s) e^{i(s-a)x} ds + \int_{-a}^a e^{i\omega x} d\omega + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos s) e^{i(s+a)x} ds \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos s) e^{i(-s-a)x} ds + \int_{-a}^a e^{i\omega x} d\omega + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos s) e^{i(s+a)x} ds \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} (1 + \cos s) \cos(s+a)x ds + \int_{-a}^a e^{i\omega x} d\omega \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\cos(s+a)x + \frac{1}{2} \cos((s+a)x + s) + \frac{1}{2} \cos((s+a)x - s) \right) ds + \int_{-a}^a e^{i\omega x} d\omega \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{\sin(s+a)x}{x} + \frac{1}{2} \frac{\sin((s+a)x + s)}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{\sin((s+a)x - s)}{x-1} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{e^{i\omega x}}{ix} \right]_{-a}^a \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(\pi+a)x}{x} - \frac{\sin((\pi+a)x)}{2(x+1)} - \frac{\sin((\pi+a)x)}{2(x-1)} - \frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin ax}{2(x+1)} - \frac{\sin ax}{2(x-1)} + \frac{2 \sin ax}{x} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin ax + \sin(\pi+a)x}{x(1-x^2)}
 \end{aligned}$$

יש צורך לטפל בערכים $x = 0, \pm 1$ בנפרד או להעזר ברציפות למצוא את הערכים של הפונקציה ב- $x = 0, \pm 1$. על ידי כלל לופיטל מוצאים

$$f_a(0) = \frac{a}{\pi} + \frac{1}{2}, \quad f_a(\pm 1) = \frac{1}{4} \cos a$$

אם ההתמרה של $g(x)$ היא $G(\omega)$ אזי ההתמרה של $g(x) * f_a(x)$ היא $G(\omega)F_a(\omega)$. אנחנו רואים שכפל של $G(\omega)$ על ידי $F_a(\omega)$ אינו משנה את הפונקציה עבור $|\omega| < a$, אבל הוא מאפס את הפונקציה עבור $|\omega| > a + \pi$. עבור $a < |\omega| < a + \pi$ מאפסים באופן הדרגתי. הפירוש הוא low pass filter שהוא "רציף" - אינו עושה חתך חד לתדרים גבוהים, אבל יש תחום שבו הוא מוריד תדירויות באופן הדרגתי.

5. אם התמרת הפוריה הדסקרטית של האות f_{-1}, f_0, f_1, f_2 היא F_{-1}, F_0, F_1, F_2 , מצא את התמרת הפוריה הדסקרטית של האות

$$\frac{1}{2}(f_2 + f_{-1}), f_{-1}, \frac{1}{2}(f_{-1} + f_0), f_0, \frac{1}{2}(f_0 + f_1), f_1, \frac{1}{2}(f_1 + f_2), f_2$$

באופן יותר כללי, אם ההתמרה של האות $\{f_n\}_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$ היא $\{F_m\}_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$, מצא את ההתמרה של האות $\{g_n\}_{n=-N+1}^N$ הנתון על ידי

$$g_n = \begin{cases} f_{n/2} & n \text{ זוגי} \\ \frac{1}{2}(f_{(n-1)/2 \bmod N} + f_{(n+1)/2}) & n \text{ אי זוגי} \end{cases}$$

התמרת פוריה דסקרטית:

$$F_m = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{2\pi i n m / N}$$

במקרה $N = 4$ יש לנו

$$F_m = \frac{1}{4} (f_{-1} e^{-i\pi m/2} + f_0 + f_1 e^{i\pi m/2} + f_2 e^{i\pi m})$$

אם יש עכשיו אות חדש $\{g_n\}$ עם $N = 8$ המוגדר על ידי

$$\begin{aligned} g_{-3} &= \frac{1}{2}(f_2 + f_{-1}) \\ g_{-2} &= f_{-1} \\ g_{-1} &= \frac{1}{2}(f_{-1} + f_0) \\ g_0 &= f_0 \\ g_1 &= \frac{1}{2}(f_0 + f_1) \\ g_2 &= f_1 \\ g_3 &= \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \\ g_4 &= f_2 \end{aligned}$$

אזי

$$G_m = \frac{1}{8} (e^{-3i\pi m/4} g_{-3} + e^{-i\pi m/2} g_{-2} + e^{-i\pi m/4} g_{-1} + g_0 + e^{i\pi m/4} g_1 + e^{i\pi m/2} g_2 + e^{3i\pi m/4} g_3 + e^{i\pi m} g_4)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} e^{-3i\pi m/4} (f_2 + f_{-1}) + e^{-i\pi m/2} f_{-1} + \frac{1}{2} e^{-i\pi m/4} (f_{-1} + f_0) + f_0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} e^{i\pi m/4} (f_0 + f_1) + e^{i\pi m/2} f_1 + \frac{1}{2} e^{3i\pi m/4} (f_1 + f_2) + e^{i\pi m} f_2 \right) \\
&= \frac{1}{8} \left(f_{-1} e^{-i\pi m/2} \left(1 + \cos \frac{\pi m}{4} \right) f_0 \left(1 + \cos \frac{\pi m}{4} \right) + f_1 e^{i\pi m/2} \left(1 + \cos \frac{\pi m}{4} \right) + f_2 e^{i\pi m} \left(1 + \cos \frac{\pi m}{4} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi m}{4} \right) F_{m \bmod 4}
\end{aligned}$$

(שים לב שכאן m רץ מ-3 עד 4 אבל F_m הוא מחזורי עם מחזור 4.)

במקרה הכללי:

$$\begin{aligned}
G_m &= \frac{1}{2N} \sum_{n=-N+1}^N g_n e^{\pi i n m / N} \\
&= \frac{1}{2N} \left(\sum_{n \text{ even}} g_n e^{\pi i n m / N} + \sum_{n \text{ odd}} g_n e^{\pi i n m / N} \right) \\
&= \frac{1}{2N} \left(\sum_{n'=-N/2+1}^{N/2} g_{2n'} e^{\pi i 2n' m / N} + \sum_{n'=-N/2+1}^{N/2} g_{2n'-1} e^{\pi i (2n'-1) m / N} \right) \\
&= \frac{1}{2N} \left(\sum_{n'=-N/2+1}^{N/2} f_{n'} e^{\pi i 2n' m / N} + \frac{1}{2} \sum_{n'=-N/2+1}^{N/2} (f_{n'-1} + f_{n'}) e^{\pi i (2n'-1) m / N} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} (e^{i\pi m / N} + e^{-i\pi m / N}) \right) F_{m \bmod N} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi m}{N} \right) F_{m \bmod N}
\end{aligned}$$

(זה מאין קונבולוציה.)