

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. מצא (א) את טור הקוסינוסים ו-(ב) את טור הסינוסים של הפונקציה $f(x) = e^x$ בקטע $0 < x < L$.
 על ידי הצבת הערכים $x = 0$ ו- $x = L$ בטור הקוסינוסים, הוכח ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} - \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{\alpha} \frac{1}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} - \frac{1}{2\alpha^2}$$

האם הנגזרת של טור הקוסינוסים נותנת את טור הסינוסים? האם הנגזרת של טור הסינוסים נותנת את הטור הקוסינוסים? נמק.

2. אם טור הפוריה של הפונקציה הממשית $f(x)$ על הקטע $[-\pi, \pi]$ הוא

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

מהו טור הפוריה של $f(x) \cos x$?

בהנחה ששיויון פרסבל מתקיים, ו- $f(x)$ היא פונקציה זוגית, הוכח ש-

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$$

אם ורק אם

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} a_{n+1} + \frac{1}{2} a_1^2 = 0$$

ומצא דוגמה של פונקציה $f(x)$ שעבורה $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \cos^2 x \, dx > \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$.

3. (א) הוכח ש-

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) + f'(x)g'(x) dx$$

היא מכפלה פנימית על מרחב הפונקציות הממשיות הרציפות והגזירות על הקטע $[-1, 1]$?
האם זה גם נכון על המרחב של פונקציות רציפות וחלקות למקוטעין ?

(ב) הוכח שהפונקציות

$$e_0 = 1, \quad e_1 = x, \quad e_2 = x^2 - \frac{1}{3}$$

הן מערכת אורתוגונלית ביחס למכפלה פנימית זו, ומצא פולינומים e_3 ו- e_4 , מדרגות 3 ו-4, שהם אורתוגונליים לפונקציות הנתונות, וגם זו לזו.

(ג) הסבר, בלי לחשב באופן מפורש את האנטגרלים הרלוונטיים, איך לעשות קירוב אופטימלי לפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

על ידי צירוף ליניארי של הפונקציות e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 . האם יש מקדמים שמתאפסים ?

4. (א) הראה שהתמרת הפוריה של

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a^2 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

היא

$$F(\omega) = \frac{2(\omega a \cos \omega a - \sin \omega a)}{\pi \omega^3}$$

כאשר $\omega \neq 0$. מהו הערך של ההתמרה כאשר $\omega = 0$?

(ב) הנגזרת השנייה של $x^2 - a^2$ היא 2, והתמרת הפוריה של

$$g(x) = \begin{cases} 2 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

היא

$$G(\omega) = \frac{2 \sin \omega a}{\pi \omega}$$

האם זה לא סותר את המשפט שההתמרה של נגזרת שניה של פונקציה $f''(x)$ היא $-\omega^2$ כפול ההתמרה של $f(x)$? נמק.

(ג) אם

$$h(x) = g(x) - 2a(\delta(x-a) + \delta(x+a))$$

הראה ש

$$f(x) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y h(z) dz \right) dy$$

והתמרת הפוריה $H(\omega)$ של $h(x)$ מקיימת

$$H(\omega) = -\omega^2 F(\omega)$$

5. נוסחאות רלוונטיות:

$$\sum_{n=a}^b r^n = \frac{r^a - r^{b+1}}{1 - r}$$
$$\sum_{n=a}^b nr^n = \frac{ar^a - (a-1)r^{a+1} - (b+1)r^{b+1} + br^{b+2}}{(1-r)^2}$$

(א) מצא את התמרת הפוריה החצי בדידה (בדידה בזמן) של הסדרה

$$f_n = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$$

(ב) מצא את התמרת הפוריה החצי בדידה (בדידה בזמן) של הסדרה

$$g_n = \begin{cases} hn & |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$$

(ג) הוכח שאם ההתמרה החצי-בדידה של הסדרה $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ היא $F(\omega)$ וההתמרה של הסדרה $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ היא $G(\omega)$, ו- $g_n = hn f_n$, אזי $G(\omega) = iF'(\omega)$.

(ד) העזר במשפט מהסעיף הקודם לבדוק את התוצאות שלך בשני הסעיפים הראשונים!

בהצלחה!