

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. מצא את טור הפוריה, על הקטע $[-\pi, \pi]$, של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| < a \\ c & |x| \geq a \end{cases}$$

כאן a הוא מספר ממשי בין 0 ל- π (בין ממש) ו- c הוא מספר ממשי כלשהוא.

מהו סכום טור הפוריה כאשר $x = a$?

עבור איזה ערך של c הטור מתכנס במידה שווה? מהם מקדמי הפוריה במקרה זה?

2. (א) מצא את טור הפוריה המרוכב של הפונקציה $f(x) = x$ על הקטע $[1, 9]$.

(ב) על ידי אנטגרציה של הטור שקבלת בסעיף (א), מצא את טור הפוריה המרוכב של הפונקציה

$$g(x) = x^2 \text{ על הקטע } [1, 9]$$

הערה: לא יינתן ניקוד לחישוב הטור באופן ישיר! יש לעשות על ידי אנטגרציה של הטור שמצאת בסעיף (א).

(ג) מצא צירוף לינארי של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ כך שטור הפוריה המרוכב של הצירוף מתכנס במידה שווה על הקטע $[1, 9]$.

3. (א) הוכח שביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)g(x) \cos x \, dx$$

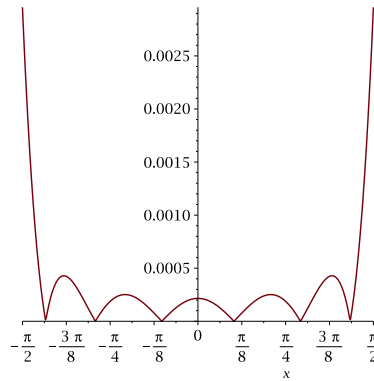
על הקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ הפונקציות 1 ו- $\cos x - \frac{1}{4}\pi$ הן אורתוגונליות זו לזו, והפונקציות 1 ו- $x^2 + 2 - \frac{1}{4}\pi^2$ הן אורתוגונליות זו לזו. העזר בזה לבנות מערכת אורתוגונלית של 3 פונקציות שהן צירופים לינאריים של הפונקציות $1, x^2, \cos x$.

(ב) הסבר את הבנייה של קירוב אופטימלי על ידי פולינום מדרגה 4 לפונקציה $f(x) = \cos x$ על הקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ביחס למכפלה הפנימית הנתונה בסעיף (א). אין צורך לחשב אף אנטגרל, אבל למעט זה יש להסביר כל שלב בחישוב.

(ג) יוצא שהתוצאה הסופית של התהליך בסעיף (א) היא הפולינום

$$p(x) = 0.999787 - 0.497573x^2 + 0.0379279x^4$$

(ל-6 ספרות דיוק), וההפרש בין הפולינום לפונקציה $\cos x$ נתונה באיור למטה:



למה הטעויות הן באופן כללי יותר גדולות לקראת קצוות הקטע?

4. הפונקציה $f_{q,h}(x)$ מוגדרת על ידי

$$f_{q,h}(x) = \begin{cases} 1 & q-h \leq x \leq q+h \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאן $h > 0$ הם קבועים ממשיים עם

(א) מצא את התמרת הפוריה $F_{q,h}(\omega)$ של $f_{q,h}(x)$.

(ב) העזר בעובדה ש-

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{q,h}(\omega) \overline{F_{0,h}(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{q,h}(x) \overline{f_{0,h}(x)} dx$$

(נוסחת פלנשרל הכללית)

להוכיח ש-

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 h\omega \cos q\omega}{\omega^2} d\omega = \begin{cases} \pi \left(|h| - \frac{q}{2} \right) & |h| > \frac{q}{2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(ג) הוכח שאם $h > 0$ ו- $k > 0$ אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin h\omega \sin k\omega}{\omega^2} d\omega = \pi \min(h, k)$$

5. (א) מצא את התמרת הפוריה הבדידה של האות $\{f_n\}_{n=-N/2}^{N/2-1}$ כאשר $f_n = 1$ לכל n .

(ב) מצא את התמרות הפוריה הבדידות של האותות $\{g_n\}_{n=-N/2}^{N/2-1}$ ו- $\{h_n\}_{n=-N/2}^{N/2-1}$ כאשר

$$g_n = \begin{cases} 2 & n \text{ זוגי} \\ 0 & n \text{ אי זוגי} \end{cases}$$

ו-

$$h_n = \begin{cases} 0 & n \text{ זוגי} \\ 2 & n \text{ אי זוגי} \end{cases}$$

הערה: מותר להניח, במידת הצורך, ש- N הוא כפולה של 4.

(ג) הסבר למה להתמרות של האותות g ו- h יש רק שני רכיבים שאינם מתאפסים.

בהצלחה!