

זמן המבחן: שעתיים וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשבון מדעי.

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. (א) (8 נקודות) מצא את טור הפוריה על הקטע $[0, 2]$ של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

צייר גרף של סכום הטור עבור $0 \leq x \leq 12$.

(ב) (8 נקודות) מצא את טור הפוריה על הקטע $[0, 4]$ של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

צייר גרף של סכום הטור עבור $0 \leq x \leq 12$.

(ג) (9 נקודות) מצא את טור הסינוסים על הקטע $[0, 2]$ של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

צייר גרף של סכום הטור עבור $0 \leq x \leq 12$.

(א) מחזור 2. פונקציה זוגית (מסביב למרכז הקטע), ולכן

$$FSf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, \quad a_n = \int_0^2 f(x) \cos n\pi x \, dx$$

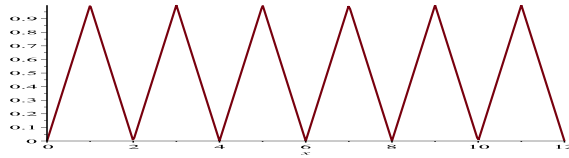
חישוב המקדמים: $a_0 = \int_0^2 f(x) \, dx = 1$. עבור $n > 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x \cos \pi n x \, dx + \int_1^2 (2 - x) \cos \pi n x \, dx \\ &= \left[\frac{x}{\pi n} \sin \pi n x + \frac{1}{\pi^2 n^2} \cos \pi n x \right]_0^1 + \left[\frac{2 - x}{\pi n} \sin \pi n x - \frac{1}{\pi^2 n^2} \cos \pi n x \right]_1^2 \\ &= \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi^2 n^2} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\pi^2 n^2} & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even} \end{cases} \end{aligned}$$

לכן

$$FSf(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odd}}}^{\infty} \frac{\cos \pi n x}{n^2}$$

סכום הטור על הקטע $[0, 12]$ שווה להכללה המחורית המנורמלת של הפונקציה:



(ב) מחזור 4.

$$FSf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{2} + b_n \sin \frac{\pi n x}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx, \quad b_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

חישוב המקדמים:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

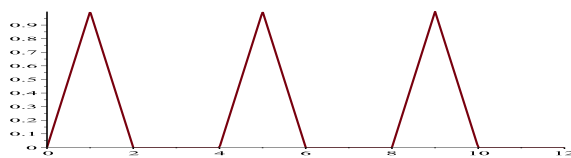
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_0^1 y \cos \left(n\pi - \frac{n\pi y}{2} \right) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \left[\frac{2x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \left(\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \right) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ odd or a multiple of 4} \\ -\frac{8}{n^2\pi^2} & n \text{ even but not a multiple of 4} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_0^1 y \sin \left(n\pi - \frac{n\pi y}{2} \right) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 - (-1)^n) \int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} (1 - (-1)^n) \left[-\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (1 - (-1)^n) \left(-\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ even} \\ \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} & n \text{ odd} \end{cases} \end{aligned}$$

לכן

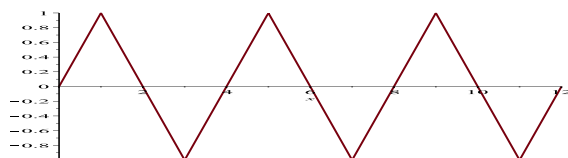
$$FSf(x) = \frac{1}{4} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n \text{ even, not a mult of } 4} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \text{ odd}} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

סכום הטור על הקטע $[0, 12]$ שווה להכללה המחורית המנורמלת של הפונקציה:



שים לב שהחלק הזוגי של הפונקציה שווה לחצי הפונקציה מסעיף (א). ואכן החלק הזוגי של טור הפוריה בסעיף זה הוא חצי טור הפוריה מסעיף (א)

(ג) וכמו כן, החלק האי זוגי של הפונקציה מהסעיף הקודם שווה חצי הפונקציה שאנחנו רוצים עכשיו, שהוא



ולכן התשובה בסעיף זה הוא פי 2 החלק האי זוגי של הטור מסעיף (ב).

$$FSf(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n \text{ odd}} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

2. מצא את טור הפוריה המרוכב, על הקטע $[-\pi, \pi]$, של הפונקציה

$$f_{q,h}(x) = \begin{cases} 1 & q-h < x < q+h \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאן q, h הם קבועים, עם $-\pi < q < \pi$, $h > 0$ ו- $|q| + h < \pi$ (כך שהקטע $[q-h, q+h]$ הוא תת-קטע של $[-\pi, \pi]$).

העזר בשיוויון פרסבל הכללי: (שאם טור הפוריה של $f(x)$ הוא $\sum c_n e^{inx}$ וטור הפוריה של $g(x)$ הוא $\sum d_n e^{inx}$ אזי

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = 2\pi \sum c_n \overline{d_n} \right)$$

להוכיח ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 hn \cos qn}{n^2} = \frac{\pi}{4} \max(2h - |q|, 0) - \frac{h^2}{2}$$

(רמז: בחר את שתי הפונקציות בפרסבל להיות $f_{0,h}(x)$ ו- $f_{q,h}(x)$.)

מצא גם את הסכום

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin hn \sin h'n}{n^2}$$

עבור $0 \leq h, h' < \pi$.

טור הפוריה המרוכב של $f_{q,h}(x)$ הוא

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{q,h}(x) e^{-inx} dx$$

חישוב המקדמים:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{q-h}^{q+h} dx = \frac{h}{\pi}$$

ועבור $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{q-h}^{q+h} e^{-inx} dx = \frac{1}{-2\pi in} \left[e^{-inx} \right]_{q-h}^{q+h} = \frac{1}{-2\pi in} \left(e^{-in(q+h)} - e^{-in(q-h)} \right) = \frac{e^{-inq} \sin nh}{\pi n}$$

ולכן הטור הוא

$$\frac{h}{\pi} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-inq} \sin nh}{\pi n} e^{inx}$$

ולכן על ידי שיויון פרסבל הכללי

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f_{q,h}(x) f_{0,h}(x) dx &= 2\pi \left(\frac{h^2}{\pi^2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-inq} \sin^2 nh}{\pi^2 n^2} \right) \\ &= \frac{2h^2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nq \sin^2 nh}{n^2} \end{aligned}$$

האנטגרל בצד שמאל הוא האורך של החפיפה של הקטע $[q-h, q+h]$ עם הקטע $[-h, h]$. שזה $\max(2h - |q|, 0)$. ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nh \cos nq}{n^2} = \frac{\pi}{4} \left(\max(2h - |q|, 0) - \frac{2h^2}{\pi} \right) = \frac{\pi}{4} \max(2h - |q|, 0) - \frac{h^2}{2}$$

גם לפי פרסבל

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f_{0,h}(x) f_{0,h'}(x) dx &= 2\pi \left(\frac{hh'}{\pi^2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{\sin nh \sin nh'}{\pi^2 n^2} \right) \\ &= \frac{2hh'}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh \sin nh'}{n^2} \end{aligned}$$

האנטגרל הוא $2\min(h, h')$. ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh \sin nh'}{n^2} = \frac{1}{2} (\pi \min(h, h') - hh')$$

שים לב שהזהות הזאת רק נכונה עבור $|h|, |h'| \leq \pi$, אבל הטור מצד שמאל הוא מחזורי עם מחזור 2π גם ב- h וגם ב- h' .

$$\langle f, g \rangle = C_1 \int_{-1}^0 f(x) \overline{g(x)} dx + C_2 \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

הוא מכפלה פנימית על המרחב של פונקציות רציפות על $[-1, 1]$ אם ורק אם $C_1, C_2 > 0$.

(ב) (4 נקודות) הוכח ששתי הפונקציות $p_1(x) = x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ ו- $p_2(x) = x - \frac{1}{\sqrt{3}}$ הן אורתוגונליות לכל בחירה של $C_1, C_2 > 0$.

(ג) (10 נקודות) מצא את היחס בין C_1 ו- C_2 אם נתון שהפונקציה $p_3(x) = 22x^2 - 2x - 7$ היא אורתוגונלית גם ל- $p_1(x)$ וגם ל- $p_2(x)$. במקרה זה מצא פולינום $p_4(x)$ מדרגה 3 שהוא אורתוגונלי לכל הפולינומים $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$.
(ד) (7 נקודות) מהו התנאי על C_1, C_2 כך ש-

$$\langle f, g \rangle = C_1 \int_{-1}^0 f(x) \overline{g(x)} dx + C_2 \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

הוא מכפלה פנימית על המרחב של פולינומים מדרגה לא יותר מ-3?

(א) הביטוי מקיים את האקסיומות של סימטריות וליניאריות עבור כל ערכים ממשיים של C_1, C_2 אבל עבור $\langle f, f \rangle \geq 0$ יש צורך לדרוש ש- C_1, C_2 יהיו גדולים או שווים 0. הדרישה הנוספת ש- $\langle f, f \rangle = 0$ אם ורק אם $f = 0$ נתון ש- C_1, C_2 יהיו חיוביים.

אולי הסבר יותר אלגנטי למה $C_1, C_2 > 0$: הדרישה $\langle f, f \rangle > 0$ עבור $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ נותנת $C_2 > 0$ ועבור $C_1 < 0$ נותנת $C_2 > 0$.

(ב)

$$\begin{aligned} \langle x - \frac{1}{\sqrt{3}}, x + \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle &= C_1 \int_{-1}^0 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx + C_2 \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= C_1 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x \right]_{-1}^0 + C_2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x \right]_0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ג) יהיה אורתוגונלי גם ל- $p_1(x)$ וגם ל- $p_2(x)$ אם ורק אם הוא אורתוגונלי גם ל-1 וגם ל- x . ויש לנו ש-

$$\begin{aligned} \langle 1, 22x^2 - 2x - 7 \rangle &= C_1 \int_{-1}^0 (22x^2 - 2x - 7) dx + C_2 \int_0^1 (22x^2 - 2x - 7) dx \\ &= C_1 \left[\frac{22x^3}{3} - x^2 - 7x \right]_{-1}^0 + C_2 \left[\frac{22x^3}{3} - x^2 - 7x \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3}C_1 - \frac{2}{3}C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, 22x^2 - 2x - 7 \rangle &= C_1 \int_{-1}^0 (22x^3 - 2x^2 - 7x) dx + C_2 \int_0^1 (22x^3 - 2x^2 - 7x) dx \\ &= C_1 \left[\frac{11}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + C_2 \left[\frac{11}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{8}{3}C_1 + \frac{4}{3}C_2 \end{aligned}$$

ברור משני החישובים שאנחנו צריכים לדרוש ש- $C_2 = 2C_1$.

ללא הגבלת כלליות אנחנו יכולים לקחת $C_2 = 2, C_1 = 1$. אנחנו רוצים עכשיו פולינום מדרגה 3 שהוא אורתוגונלי ל- p_1, p_2, p_3 . על ידי גרם-שמידט יש לקחת

$$p_4 = x^3 - \frac{\langle x^3, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} p_1 - \frac{\langle x^3, p_2 \rangle}{\langle p_2, p_2 \rangle} p_2 - \frac{\langle x^3, p_3 \rangle}{\langle p_3, p_3 \rangle} p_3$$

לא ציפיתי שמישהו יחשב את זה אבל אני רושם פה את הערכים של כל האנטגרלים והתוצאה הסופית:

$$\begin{aligned} p_4 &= x^3 - \frac{\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{3}}{12}}{2 - \frac{1}{\sqrt{3}}} p_1 - \frac{\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{3}}{12}}{2 + \frac{1}{\sqrt{3}}} p_2 - \frac{\frac{43}{60}}{\frac{627}{5}} p_3 \\ &= x^3 - \frac{43}{342} x^2 - \frac{511}{855} x + \frac{199}{3420} \end{aligned}$$

(ד) כמו בסעיף (א) סימטריות ולינאריות מתקיימות לכל C_1, C_2 ממשי. הפעם יש צורך לבדור ש- $\langle f, f \rangle \geq 0$ רק עבור פולינום f מדרגה 3 $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. בסעיף (א) היתה אפשרות לבחור f שמתאפס באחד הקטעים $[0, 1]$ או $[-1, 0]$ ומזה נבע שגם C_1 וגם C_2 חייבים להיות גדולים או שווים 0. כאן אין אפשרות כזו. יש לנו רק לדרוש שלכל f שאינו 0

$$C_1 \int_{-1}^0 f^2 dx + C_2 \int_0^1 f^2 dx \geq 0$$

אם (ללא הרבה הגבלת כלליות) נקח C_2 חיובי יש לנו לדרוש ש- $C_1 \geq -MC_2$ כאשר

$$M = \min_{f \neq 0} \frac{\int_0^1 f^2 dx}{\int_{-1}^0 f^2 dx}$$

ניתן לחשב את M אבל לא כאן - התשובה הנומרית היא בערך 0.00017.

4. (א) (6 נקודות) מצא את התמרות הפוריה של הפונקציות

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

(ב) (6 נקודות) הוכח שניתן לכתוב את הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} ax + b & d - c < x < d + c \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

בצורה

$$g(x) = (ad + b)f_1\left(\frac{x-d}{c}\right) + acf_2\left(\frac{x-d}{c}\right)$$

כאן a, b, c, d הם קבועים כלשהם, עם $c > 0$.

(ג) (6 נקודות) העזר בסעיף הקודם לחשב את התמרת הפוריה של $g(x)$. הערה: אין לחשב אף אנטגרל, יש לנצל את הסעיף הקודם.

(ד) (7 נקודות) העזר בסעיף הקודם למצוא את ההתמרה של

$$h(x) = \begin{cases} C + x & -C < x < -D \\ C - D & -D < x < D \\ C - x & D < x < C \\ 0 & |x| \geq C \end{cases}$$

כאשר $0 < D < C$.

(א)

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{-2\pi i\omega} [e^{-i\omega x}]_{-1}^1 = \frac{\sin \omega}{\pi \omega}$$

$$F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 x e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1 + ix\omega}{\omega^2} e^{-i\omega x} \right]_{-1}^1 = \frac{i(\omega \cos \omega - \sin \omega)}{\pi \omega^2}$$

כאן הנחת $\omega \neq 0$, בקלות רואים ש- $F_2(0) = 0, F_1(0) = \frac{1}{\pi}$ שתי ההתמרות הן רציפות ב- $\omega = 0$.

(ב) אם נגדיר

$$g(x) = (ad + b)f_1\left(\frac{x-d}{c}\right) + acf_2\left(\frac{x-d}{c}\right)$$

אזי $g(x) = 0$ אלא אם כן $\left|\frac{x-d}{c}\right| < 1$ כלומר $d - c < x < d + c$. בקטע הזה יש לנו ש-

$$g(x) = (ad + b) + ac \frac{x-d}{c} = ax + b$$

ולכן קבלנו את הטענה שרצינו.

(ג) למדנו שההתמרה של $f_1\left(\frac{x-d}{c}\right)$ היא $ce^{-i\omega d}F_1(c\omega)$ ואותו דבר ל- f_2 . ולכן ההתמרה של $g(x)$ היא

$$\begin{aligned} G(\omega) &= (ad + b)ce^{-i\omega d}F_1(c\omega) + ac^2e^{-i\omega d}F_2(c\omega) \\ &= e^{-i\omega d} \left((ad + b)c \frac{\sin c\omega}{\pi c\omega} + ac^2 \frac{i(c\omega \cos c\omega - \sin c\omega)}{\pi c^2 \omega^2} \right) \\ &= \frac{e^{-i\omega d} ((b + ad)\omega - ai) \sin c\omega + iac\omega \cos c\omega}{\pi \omega^2} \end{aligned}$$

(ד) $h(x)$ היא סכום של 3 פונקציות מהסוג של $g(x)$.

בראשון: $d = -\frac{1}{2}(C + D), c = \frac{1}{2}(C - D), b = C, a = 1$

בשני: $d = 0, c = D, b = C - D, a = 0$

בשלישי: $d = \frac{1}{2}(C + D), c = \frac{1}{2}(C - D), b = C, a = -1$

ולכן ההתמרה של $h(x)$ היא $H(\omega)$ כאשר

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{e^{i\omega(C+D)/2} ((c\omega - i) \sin c\omega + ic\omega \cos c\omega)}{\pi \omega^2} \\ &\quad + \frac{2c \sin D\omega}{\pi \omega} \\ &\quad + \frac{e^{-i\omega(C+D)/2} ((c\omega + i) \sin c\omega - ic\omega \cos c\omega)}{\pi \omega^2} \\ &= \frac{2c \sin D\omega}{\pi \omega} + \frac{2c \cos \frac{(C+D)\omega}{2} \sin c\omega}{\pi \omega} + \frac{2 \sin \frac{(C+D)\omega}{2} (\sin c\omega - c\omega \cos c\omega)}{\pi \omega^2} \\ &= \frac{2 \sin \frac{(C+D)\omega}{2} \sin \frac{(C-D)\omega}{2}}{\pi \omega^2} \end{aligned}$$

כאן בשורות הראשונות $c = \frac{1}{2}(C - D)$. אפשר לכתוב את התשובה גם בצורה

$$\frac{\cos D\omega - \cos C\omega}{\pi \omega^2}$$

5. אם התמרת הפורייה הבדידה של הסדרה $\{f_n\}_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$ היא הסדרה $\{F_m\}_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$, הוכח שהתמרת הפורייה הבדידה של הסדרה $\{h_n\}_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$, המוגדרת על ידי

$$h_n = f_{n+1 \bmod N} - 2f_n + f_{n-1 \bmod N}$$

היא $\{H_m\}_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}}$, כאשר

$$H_m = -4 \sin^2 \frac{\pi m}{N} \cdot F_m$$

אם $f_n = n^2$, עבור $n = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}$, מצא, לפי הסדר, את $\{h_n\}$, את $\{H_m\}$ ואת $\{F_m\}$.

נתון ש-

$$F_m = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{-2\pi i n m / N}$$

אנחנו רוצים לחשב את

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} h_n e^{-2\pi i n m / N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} (f_{n+1 \bmod N} - 2f_n + f_{n-1 \bmod N}) e^{-2\pi i n m / N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_{n+1 \bmod N} e^{-2\pi i n m / N} - 2F_m + \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_{n-1 \bmod N} e^{-2\pi i n m / N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n'=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_{n'} e^{-2\pi i (n'-1)m / N} - 2F_m + \frac{1}{N} \sum_{n'=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_{n'} e^{-2\pi i (n'+1)m / N} \\ &= (e^{2\pi i m / N} - 2 + e^{-2\pi i m / N}) F_m \\ &= 2 \left(\cos \frac{2\pi m}{N} - 1 \right) F_m \\ &= -4 \sin^2 \frac{\pi m}{N} F_m \end{aligned}$$

יש להדגיש שבביטוי $e^{2\pi i n m / N}$ ניתן להוסיף (או להוריד) N ל- n (מ- n) בלי לשנות את הערך.

אם $f_n = n^2$ אזי למעט כאשר $n = -\frac{N}{2} + 1$ או $n = \frac{N}{2}$,

$$h_n = (n+1)^2 - 2n^2 + (n-1)^2 = 2$$

כאשר $n = -\frac{N}{2} + 1$

$$h_{-\frac{N}{2}+1} = \left(-\frac{N}{2} + 2\right)^2 - 2\left(-\frac{N}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{N}{2}\right)^2 = 2$$

וכאשר $n = \frac{N}{2}$

$$h_{\frac{N}{2}} = \left(\frac{N}{2} - 1\right)^2 - 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(-\frac{N}{2} + 1\right)^2 = 2 - 2N$$

לסיכום

$$h_n = \begin{cases} 2 - 2N & n = \frac{N}{2} \\ 2 & n \neq \frac{N}{2} \end{cases}$$

ולכן

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} h_n e^{-2\pi i n m / N} \\ &= \frac{2}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} e^{-2\pi i n m / N} - 2e^{-\pi i m} \\ &= \begin{cases} 0 & m = 0 \\ -2(-1)^m & m \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

סכום הטור ההנדסי הוא N כאשר $m = 0$ ו-0 אחרת, כי היחס בחזקה N שווה 1.

יש לשים לב שלפי המשפט

$$H_m = -4 \sin^2 \frac{\pi m}{N} F_m$$

חייב להיות ש- $H_0 = 0$. ומהמשפט הזה נובע מיד שכאשר $m \neq 0$

$$F_m = \frac{(-1)^m}{2 \sin^2 \frac{\pi m}{N}}$$

כאשר $m = 0$ יש לנו

$$F_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} n^2 = \frac{1}{N} \left(2 \cdot \frac{\frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) (N + 1)}{6} - \frac{N^2}{4} \right) = \frac{N^2 + 2}{12}$$
