

זמן המבחן: שעהיים וחצי.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשבון מדעי.

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. ניקוד כל השאלות שווה. יש לנמק היטב כל תשובה.

1. מצא את טור הפוריה, על הקטע  $[-\pi, \pi]$ , של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x & 0 \leq |x| < \frac{\pi}{2} \\ \sin x & \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

כאשר  $\lambda$  הוא קבוע. מהו סכום הטור כאשר  $x = \frac{\pi}{2}$ ? מהו הערך של  $\lambda$  שעבורו הטור מתכנס במידה שווה? הוכח שבמקרה זה קיים קבוע  $C$  כך שלכל  $n \geq 1$  מקדמי הפוריה  $a_n, b_n$  הם קטנים, בערך מוחלט, מ-  $\frac{C}{n^2}$ .

2. (a) (8 נקודות) מצא את טור הפוריה, על הקטע  $[-L, L]$ , של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x(L-x) & 0 \leq x < L \\ x(L+x) & -L < x < 0 \end{cases}$$

(b) (8 נקודות) מצא את  $f'(x)$  ואת  $\int_{-L}^x f(x) dx$  ואת טורי הפוריה של פונקציות אלו.

(c) (9 נקודות) האם  $f(x)$  גזירה פעמיים? מהו הסכום של טור הפוריה שמקבלים כאשר גוזרים את טור הפוריה של  $f(x)$  איבר-איבר פעמיים?

3. (a) (4 נקודות) האם הביטוי

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=-2}^2 f(i) \overline{g(i)}$$

מגדיר מכפלה פנימית על מרחב הפונקציות הרציפות בקטע  $[-2, 2]$ ?

(b) (6 נקודות) הוכח שאם

$$f_0 = 1, \quad f_1 = x, \quad f_2 = x^2 - 2, \quad f_3 = x^3 - \frac{17}{5}x, \quad f_4 = x^4 - \frac{31}{7}x^2 + \frac{72}{35}$$

אזי  $\langle f_i, f_j \rangle = 0$  כאשר  $i \neq j$ .

(c) (15 נקודות) בהנתן פונקציה רציפה  $g(x)$  בקטע  $[-2, 2]$  מגדירים

$$\tilde{g}(x) = \sum_{i=0}^4 a_i f_i(x), \quad a_i = \frac{\langle g, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle}$$

באיזה מובן  $\tilde{g}(x)$  הוא קירוב טוב ל-  $g(x)$ ? מצא את  $\tilde{g}(x)$  כאשר  $g(x) = x^5$ . נוסחאות עזר:

$$\langle f_0, f_0 \rangle = 5, \quad \langle f_1, f_1 \rangle = 10, \quad \langle f_2, f_2 \rangle = 14, \quad \langle f_3, f_3 \rangle = \frac{72}{5}, \quad \langle f_4, f_4 \rangle = \frac{288}{35}$$

4. מצא את התמרת פוריה ההופכית,  $\tilde{f}(x)$ , של

$$F(\omega) = \begin{cases} \cos a\omega & -L < \omega < L \\ 0 & |\omega| \geq L \end{cases}$$

כאשר  $a, L$  הם קבועים חיוביים.

האם התמרת הפוריה של  $\tilde{f}(x)$  שווה ל-  $F(\omega)$ ? העזר בתשובה שלך למצוא את האנטגרלים

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \frac{\pi x}{a}}{a^2 - x^2} \cos(\omega x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi x}{2a}}{a^2 - x^2} \cos(\omega x) dx$$

לכל  $\omega \in \mathbf{R}$ .

5. אם התמרת הפוריה החצי-בדידה של הסדרה  $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  היא

$$F(\omega) = \cos a\omega, \quad -\frac{\pi}{h} \leq \omega \leq \frac{\pi}{h}$$

כאשר  $a$  הוא פרמטר חיובי, ו-  $h$  הוא הפרמטר שמופיע בהתמרה החצי-בדידה בצורה שלמדנו בשיעור, מצא, דרך ההתמרה ההופכית הרלוונטית, את הסדרה  $f_n$ .

על ידי חישוב ההתמרה של הסדרה שמצאת (מספיק להסתכל על המקרה  $h = 1$ ), הוכח ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \omega n}{a^2 - n^2} = \frac{\pi \cos \omega a}{2a \sin \pi a} - \frac{1}{2a^2}$$

כאשר  $|\omega| < \pi$  ו-  $a > 0$  אינו שלם. האם זה נכון גם עבור  $|\omega| > \pi$ ?

בהצלחה!