

קווים כלליים לקורס אנליזה הרמונית

Table of contents

1.....	הקדמה	(1)
2.....	מרחבי הילברט	(1.1)
2.....	התכנסות בנורמה ומקדמי פורייה	(2)
3.....	תהליך גרם שמידט	(2.1)
3.....	אי-שיוויון בסל ושיוויון פרסבל	(2.2)
4.....	הקירוב הטוב ביותר	(3)
4.....	כש $u \in \text{span}\{e_n\}$	(3.1)
4.....	כש $u \notin \text{span}\{e_n\}$	(3.2)
6.....	הקשר המעשי שבין המכפלה הפנימית לקירוב הטוב ביותר (מופיע הרבה במבחנים)	(3.3)
7.....	משפטים והגדרות עבור המרחב $E[-\pi, \pi]$	4)
8.....	דוגמאות למרחבי הילברט	(5)

(1) הקדמה

כמעט כל תרגיל או בעיה בקורס הזה כוללים 3 מושגים בסיסיים.

1. מרחב וקטורי V כלשהו מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$.
2. מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ על המרחב V .
3. משפחה אורתונורמלית של פונקציות $\{e_n\}_{n \in I}$, כאשר I יכולה להיות קבוצה סופית כמו $1, \dots, n$ או קבוצה אינסופית כמו $\mathbb{Z}$ או $\mathbb{N}$. כלומר

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

דוגמא 1: נסתכל על המרחב $E[-\pi, \pi]$. זהו (1) מרחב וקטורי ביחס לחיבור רגיל של פונקציות רציפות למקוטעין המוגדרות על הקטע $[-\pi, \pi]$ מעל השדה $\mathbb{C}$ (2) מצויד במכפלה פנימית $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ (3) וקיימת בו

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \dots \right\}.$$

משפחה אורתונורמלית

דוגמא 2: נסתכל על (1) המרחב V של הפונקציות האינטגרביליות בריבוע בקטע $[-1,1]$ ומקבלות ערכים ממשיים עם (2)

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \quad (3) \text{ ומשפחה אורתונורמלית המוגדרת ע"י}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = 2x - 1 \text{ עם תנאי התחלה}$$

דוגמא 3: נסתכל על (1) $E[-\pi, \pi]$ עם (2) המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ ועם המערכת האורתונורמלית

$$\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

דוגמא 4: נסתכל על (1) המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^2$ עם (2) המכפלה הפנימית והמשפחה $e_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$

הערה: שימו לב כי לכל מרחב וקטורי V ניתן להגדיר אינסוף מכפלות פנימיות. לכל מכפלה פנימית יש אינסוף אפשרויות לבחור את המשפחה האורתונורמלית!!!

1.1 מרחבי הילברט

הגדרה: מרחב נורמי V יקרא שלם אם לכל סדרת קושי $v_n \in V$ מתקיים כי $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in V$. שימו לב כי ההתכנסות הינה בנורמה $\|\cdot\|$.

דוגמא: המרחב הנורמי $\mathbb{Q}$ איננו שלם ביחס לנורמה של ערך מוחלט.

הגדרה: מרחב מכפלה פנימית שלם נקרא מרחב הילברט.

בקורס זה אנו נעסוק במרחבי הילברט (כלומר מרחבי מכפלה פנימית שלמים). הסיבה לכך נעוצה במשפטים חשובים שתקפים דוקא למרחבי הילברט.

2 התכנסות בנורמה ומקדמי פורייה

נסתכל על הדוגמא האחרונה. כל זוג ווקטורים בת"ל $\{v_1, v_2\}$ פורש לי את המרחב ולכן נוכל לייצג כל וקטור ב $\mathbb{R}^2$ ע"י זוג מספרים $\{c_1, c_2\}$. עבור $\{v_1, v_2\}$ כלליים לא תמיד יהיה קל למצוא את $\{c_1, c_2\}$. זו הסיבה ל"אובססיות" שלנו עם משפחות אורתונורמליות אשר ברור כי הן בת"ל ולכן פורשות את $\mathbb{R}^2$, עבורן קל למצוא את $\{c_1, c_2\}$. לדוגמא, אם $u \in \mathbb{R}^2$, ביחס ל $\{e_1, e_2\}$ בדוגמא 4, נקבל כי $c_1 = \langle u, e_1 \rangle, c_2 = \langle u, e_2 \rangle$. פשוט וקל.

אנו רוצים לעשות את אותו הדבר בדיוק עבור מרחבים וקטוריים עם בסיס אינסופי ומשפחה אורתונורמלית $\{e_n\}$ אינסופית. כעת לא ברור למה הכוונה ב $V = \text{span}\{\{e_n\}\}$. על מנת להגדיר את $\text{span}\{\{e_n\}\}$ נגדיר את הנורמה $\|u\| \triangleq \sqrt{\langle u, u \rangle}$ וכן

$$\text{span}\{e_n\} \triangleq \left\{ v \in V : \exists c_i, \forall i \in I, \left\| v - \sum_{i \in I} c_i e_i \right\| \right\}$$

דוגמא: במרחב $E[-\pi, \pi]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ והמשפחה האורתונורמלית

$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \dots \right\}$ מתקיים $E[-\pi, \pi] = \text{span}\{A\}$. מדוע? כי לכל $f \in E[-\pi, \pi]$ נוכל למצוא סקלרים a_n, b_n כך ש

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{i \in I} c_i e_i \right\| &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=0}^M a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right\| \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f - \sum_{n=0}^M a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)^2 dx = 0 \end{aligned}$$

עכשיו שהגדרנו את $\text{span}\{e_n\}$, גם כאן נקבל כי במידה ו $V = \text{span}\{e_n\}$ נוכל לייצג כל וקטור ע"י קבוצה סופית או אינסופית של סקלרים $c_i = \langle v, e_i \rangle$. אלו נקראים מקדמי פורייה המוכללים.

(2.1) תהליך גרם שמידט

נניח ויש לנו מרחב מכפלה פנימית V ואוסף של וקטורים בלתי תלויים $\{v_i\}_{i \in I}$ אשר פורשים את V . נניח ואנו רוצים למצוא את הייצוג של $w \in V$ ביחס ל $\{v_i\}_{i \in I}$. זה עלול להיות מסובך כי $\{v_i\}_{i \in I}$ אינם בהכרח אורתוגונליים. תהליך גרם שמידט מקבל משפחה של וקטורים בת"ל $\{e_i\}_{i \in I}$ ומחזיר משפחה של וקטורים אורתונורמליים. תהליך גרם שמידט:

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1 \\ e_k &= v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i \end{aligned}$$

(2.2) אי-שיוויון בסל ושיוויון פרסבל

יהי V מרחב וקטורי ותהי משפחה אורתונורמלית $\{e_n\} \in V$ אשר לא בהכרח פורשת את V . יהי $u \in V$, ונגדיר את הטור פורייה המוכלל של u ע"י $\hat{u} = \sum_{i \in I} c_i e_i$. אזי מתקיים (א"ש בסל)

$$\|\hat{u}\|^2 = \sum_{i \in I} |c_i|^2 \leq \|u\|^2$$

אם $\{e_n\}$ פורשת את V אזי בהכרח מתקיים (משפט פרסבל)

$$\|\hat{u}\|^2 = \sum_{i \in I} |c_i|^2 = \|u\|^2$$

(3) הקירוב הטוב ביותר

$$u \in \text{span}\{e_n\} \quad \text{כש} \quad (3.1)$$

ראינו בסעיפים הקודמים כי אם $\text{span}\{\{e_n\}\} = V$ אזי נוכל לייצג כל $u \in V$ ע"י הטור פורייה המוכלל שלו $\hat{u} = \sum_{i \in I} c_i e_i$, כאשר $c_i = \langle u, e_i \rangle$. שימו לב כי במובן של הנורמה במרחב V מתקיים שיויון ממש! כלומר $\|\hat{u} - u\| = 0$.

דוגמא: נסתכל על $V = E[-\pi, \pi]$ עם $A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \dots \right\}$ מתקיים $E[-\pi, \pi] = \text{span}\{A\}$. לכן נוכל לייצג את

$$x \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot \cos(nx) + \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad \text{ע"י הטור } (E[-\pi, \pi] \text{ ב})$$

. הסיבה לשימוש ב $\sim$ נעוצה בעובדה כי הטור איננו מתכנס נקודתית, אך הוא כן מתכנס בנורמה! שכן

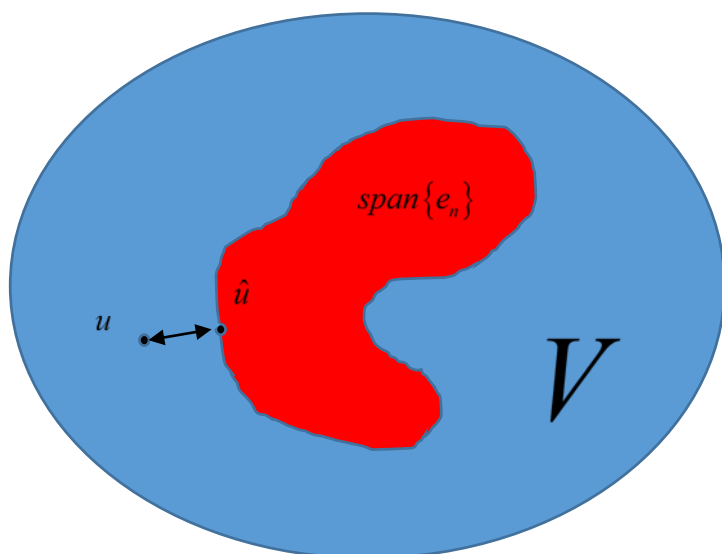
$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| x - \sum_{n=0}^M \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right|^2 dx = 0$$

$$u \notin \text{span}\{\{e_n\}\} \quad \text{כש} \quad (3.2)$$

מה יקרה אם נשתמש עבור $x+1 \in E[-\pi, \pi]$ רק בחלק מהקבוצה $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \dots \right\}$? למשל, נוציא את $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

כעת, לא נוכל לייצג את $x+1$ ע"י טור פורייה של המשפחה האורתונורמלית $\{\sin(x), \cos(x), \dots\}$ במובן של שיויון בנורמה. כלומר, לא יתקיים $\|\hat{u} - u\| = 0$. למרות זאת, נוכל לומר דבר חשוב מאוד (!!) לגבי $\hat{u}$, זהו הקירוב הטוב ביותר לקבוצה $\text{span}\{\{\sin(x), \cos(x), \dots\}\}$ במילים אחרות מתקיים

$$\|\hat{u} - u\| = \min_{v \in \text{span}\{\sin(x), \cos(x), \dots\}} \{\|v - u\|\}$$



ניתן להראות כי $\langle \hat{u} - u, v \rangle = 0$ עבור כל $v \in \text{span}\{e_n\}$.

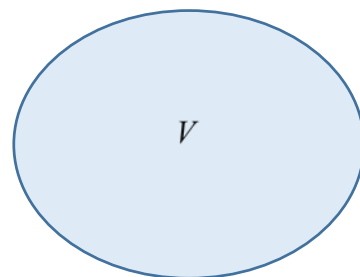
דוגמא: נסתכל על $V = \mathbb{R}^3$ עם $e_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. נניח ואנו רוצים לייצג את $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ בעזרת e_1 ו e_2 .

בלבד. לא ניתן לעשות זאת כיוון ש $u \notin \text{span}\{e_1, e_2\}$. למרות זאת, ניתן למצוא את הוקטור הקרוב ביותר $\hat{u}$ ב

$\text{span}\{e_1, e_2\}$. נחשב $c_1 = \langle u, e_1 \rangle = \cos \theta - \sin \theta, c_2 = \langle u, e_2 \rangle = \sin \theta + \cos \theta$ ו $\hat{u} = c_1 e_1 + c_2 e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

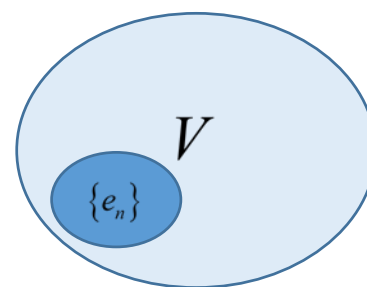
לסיכום, כמעט כל בעיה בקורס מסתכמת בשלבים הבאים:

1. הגדרת מרחב וקטורי V .

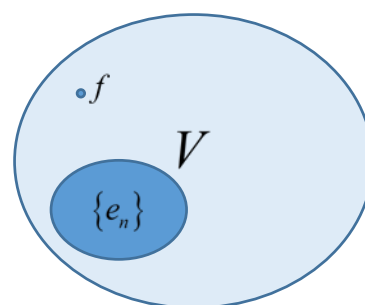


2. מציאת מכפלה פנימית על $\langle \cdot, \cdot \rangle$ על V .

3. מציאת משפחה אורתונורמלית $\{e_n\}$ הנמצאת ב V ביחס ל $\langle \cdot, \cdot \rangle$.



4. עבור $f \in V$ מציאת מקדמי הפורייה שלו ע"י $c_n = \langle e_n, f \rangle$.



5. הצגת f כטור $f = \sum_i c_n e_n$.

(3.3) הקשר המעשי שבין המכפלה הפנימית לקירוב הטוב ביותר (מופיע הרבה במבחנים)

ראינו שעבור מרחב הילברט V ומשפחה אורתונורמלית $\{e_n\}$ ב V ניתן למצוא את הקירוב הטוב ביותר ל $u \in V$ ב $span\{e_n\}$ בקלות יחסית. ראינו גם כי המרחק $\|\hat{u} - u\|$ הינו הקטן ביותר שניתן להשיג ו $\|\hat{u} - u\| = \|\hat{u} - u\|$. נראה שיש קשר בין המכפלה הפנימית של המרחב לבין התכונות של $\hat{u}$.

דוגמא: פולינומי צ'בישב הינם משפחה אורתוגונלית אשר פורשת את המרחב $L^2([-1,1])$ ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) w(x) dx \quad \text{כאשר} \quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

הינה פונקציית משקל. שימו לב כי סביב הנקודות 1 ו -1 פונקציית המשקל מקבלת ערכים גבוהים ולכן סביר ש $\hat{u}$ תהיה קרובה יותר ל u סביב נקודות אלו מאשר נקודות אחרות.

דוגמא: פולינומי לז'נדר הינם משפחה אורתונורמלית ב $L^2([-1,1])$ ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) w(x) dx \quad \text{כאשר} \quad w(x) = 1.$$

כאן, נראה שכל נקודה מקבלת "יחס" שווה ולכן לא נצפה לדיוק יתר סביב נקודה מסוימת.

1. (שאלה ממבחן) רוצים לעשות קירוב לפונקציה $\sin(x)$ על הקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$ ע"י צירוף לינארי של שלוש הפונקציות

$$1, x, \cos(x)$$

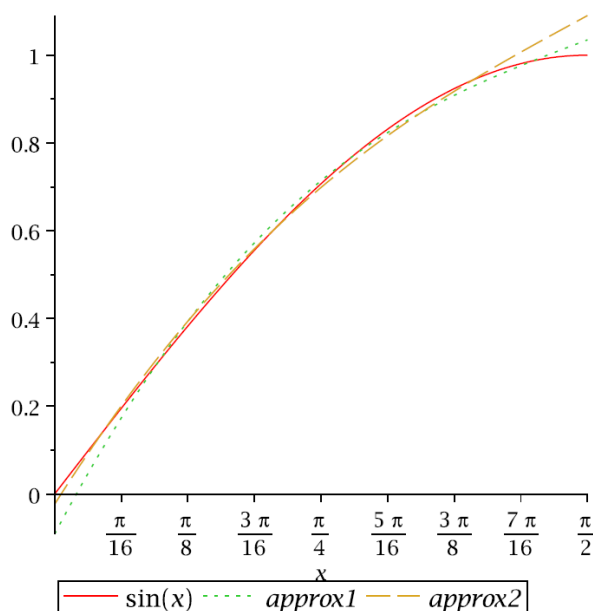
א. הסבר איך ניתן לצרף את שלוש הפונקציות $1, x, \cos(x)$ לקבל מערכת אורתוגונלית e_1, e_2, e_3 ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} w(x) f(x) \overline{g(x)} dx$$

כאשר $w(x)$ היא פונקציית משקל נתונה. הסבר עוד איך ניתן לבנות קירוב ע"י שימוש במערכת e_1, e_2, e_3 . פתרון: ע"י תהליך גרם שמידט נהפוך את $1, x, \cos(x)$ למערכת האורתונורמלית e_1, e_2, e_3 . לאחר מכן הקירוב לפונקציה f יהיה

$$f \sim \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2 + \langle f, e_3 \rangle e_3$$

ב. עשיתי את התרגיל הזה פעמיים, פעם עם פונקציית המשקל $w(x) = \cos(x)$ ופעם עם פונקציית המשקל $w(x) = \sin(x)$. קיבלתי את הקירובים המופיעים באיור למטה. איזה קירוב, לדעתך, approx1 (קו הנקודות) או approx2 (הקו השבור), שייך לאיזו פונקציית משקל? נמק.



פתרון: הפונקציה $\cos(x)$ מקבלת 1 בסביבה של 0 ואפס בסביבה של $\frac{\pi}{2}$, לכן נצפה שהדגש במכפלה הפנימית שהיא יוצרת

תהיה סביב הנקודה 0 (approx2). משיקולים דומים נובע כי הדגש במכפלה הפנימית של $\sin(x)$ יהיה סביב הנקודה $\frac{\pi}{2}$ (approx1).

4) משפטים והגדרות עבור המרחב $E[-\pi, \pi]$

ישנם משפטים והגדרות אשר אינם רלוונטים עבור כל מרחב הילברט. על מנת לעשות סדר בדברים נציין אותם כאן.

- i. **משפט דריכלה וגרעין דריכלה** - נועדו להגיד לנו מתי הקירוב $\hat{u}$ מתכנס ל u נקודתית ולא רק בנורמה.
- ii. **נגזרות ואינטגרלים** – נועדו לומר לנו מתי ניתן לגזור ולבצע אינטגרציה על הקירוב $\hat{u}$.
- iii. **התכנסות במידה שווה** – אם נגדיר את $\hat{u}_n$ להיות הקירוב הטוב ביותר של u במרחב החלקי $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(nx), \cos(nx) \right\}$ מתי $\hat{u}_n \rightarrow u$ במידה שווה? (שימו לב כי $\hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$ בנורמה).

5) דוגמאות למרחבי הילברט

דוגמאות	שלב 1	שלב 2	שלב 3	שלב 4	שלב 5
$\mathbb{R}^k$	$\mathbb{R}^k$ ביחס לחיבור וקטורי רגיל.	$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$	$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$	זא $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ אם $c_n = \langle x, e_n \rangle = a_n$	$x = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
פורייה	$E[-\pi, \pi]$	$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$	$\{e_n\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nx), \sin(nx) \right\}$	a_n, b_n	$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$
פורייה	$E[-\pi, \pi]$	$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$	$\{e_n\} = \{e^{inx}\}$	c_n	$\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$
פורייה בקטעים שונים	$E[a, b]$	$\langle f, g \rangle = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$	$e_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right), \sin\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \right\}$	a'_n, b'_n	$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$
Haar	$L^2[0,1]$	$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$	$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ $e_{n,k} = 2^{\frac{n}{2}} \psi(2^n x - k), 0 \leq k \leq 2^n$	$c_{n,k} = \langle e_{n,k}, f \rangle$	$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^i} c_{i,j} 2^{\frac{i}{2}} \psi(2^i x - j)$
התמרת פורייה (היוריסטי בלבד)	$L^2[(-\infty, \infty)]$	$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$	$e_{\omega} = \{e^{i\omega x}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$	$c_{\omega} = \hat{f}(\omega)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$