בס"ד

אנליזה הרמונית 83-210

תרגילים על טורי פוריה מכוללים

1. (א) הסבר למה $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\ dx$ איננה מכפלה פנימית על המרחב של פונקציות רציפות למקוטעין על הקטע $[0,1]$.

(ב) אומרים ששתי פונקציות רציפות למקוטעין f_1, f_2 הן שקולות אם ההפרש שלהן מתאפס למעט במספר סופי של נקודות. הוכח שאם f_1, f_2 הן שקולות ו- g_1, g_2 הן שקולות אזי af_1+bg_1 ו- af_2+bg_2 הן שקולות (a,b סקלרים). כמו כן הוכח ש- $\langle f_1, g_1\rangle = \langle f_2, g_2\rangle$.

(ג) אומרים שפונקציה רציפה למקוטעין f על הקטע $[0,1]$ היא מנורמלת אם $f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x-) + f(x+)\right)$ לכל $x \in (0,1)$ וגם $f(1) = f(1-)$ ו- $f(-1) = f(-1+)$. הוכח שכל פונקציה רציפה למקוטעין היא שקולה לפונקציה מנורמלת אחת ויחידה, שהפונקציות המנורמלות מהוות מרחב ווקטורי, וש- $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\ dx$ כן מגדיר מכפלה פנימית על מרחב זה.

2. מצא את מקדמי הפוריה של הפונקציות x ו- x^2 ביחס למערכת האורתונורמלית של פונקציות Haar בקטע $[0,1]$. מצא את הקירובים האופטימליים לפונקציות אלו בעזרת צירוף ליניארי של 2^n פונקציות Haar.

3. מצא את מקדמי טור פוריה-לז'נדר של הפונקציות $\mathrm{sgn(x)}$ ו- $|x|$ בקטע $[-1,1]$.

קצת עזרה: העזר בנוסחת רודריגס להגדרת פולינומי לז'נדר לחשב את האנטגרלים הרלוונטיים. התשובות הן

$$\mathrm{sgn}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(2n+1)(n-1)!}{2^n\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!} P_n(x)$$

כאשר Σ' מסמן סכום רק על n אי-זוגי ו-

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty}{}'' (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{(2n+1)(n-2)!}{2^n\left(\frac{n}{2}+1\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!} P_n(x)$$

כאשר Σ'' מסמן סכום רק על n זוגי.

4. אם המקדמים של $\mathrm{sgn}(x)$ בשאלה הקודמת הם a_n והמקדמים של $|x|$ הם b_n, הוכח, על ידי שימוש בנוסחת סטרלינג של- n גדול

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\ , \qquad b_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

מהיא, לדעתך, התכונה של $|x|$ שבגללה המקדמים שלה שואפים ל- 0 יותר מהר?

נוסחת סטרלינג: ל n גדול $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}$.

5. פולינומי צ'ביצ'ף מהצורה הראשונה $T_n(x)$, $n = 0,1,2,\ldots$, מוגדרים על ידי

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

(לדוגמה, ידוע ש- $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ ולכן $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.) הוכח שפולינומי צ'ביצ'ף הם אורתוגונליים ביחס למכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\overline{g(x)}\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

מצא נוסחה למקדמי פוריה הקשורים (מקדמי טור פוריה-צ'ביצ'ף).

6. חשב קירובים לפונקציה $e^{x/2}$ בקטע $[-1,1]$

(א) על ידי פולינום טיילור מדרגה 3 (מסביב ל- $x=0$)

(ב) כצירוף אופטימלי של 4 פולינומי לז'נדר $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ ("אופטימלי" ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $C[-1,1]$.)

(ג) כצירוף אופטימלי של 4 פולינומי צ'ביצ'ף $T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x)$ ("אופטימלי" ביחס למכפלה הפנימית הנתונה בשאלה הקודמת.)

מספיק לתת ערכים נומריים לאנטגרליים הרלוונטיים. השוואה בין שלושת הקירובים. מה עדיף?

בהצלחה!