

תרגילים על התמרת פוריה סמי-דסקרטית והתמרת פוריה דסקרטית

נוסחאות: התמרת פוריה סמי-דסקרטית.

$$F(\omega) = \frac{h}{2\pi} \sum_n f_n e^{-i\omega n h}, \quad f_n = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} F(\omega) e^{i\omega n h} d\omega$$

שיויון פרסבל:

$$\frac{h}{2\pi} \sum_n |f_n|^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |F(\omega)|^2 d\omega$$

התמרת פוריה דסקרטית

$$F_m = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{-2\pi i m n / N}, \quad f_n = \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} F_m e^{2\pi i m n / N}$$

שיויון פרסבל:

$$\frac{1}{N} \sum_n |f_n|^2 = \sum_m |F_m|^2$$

התמרת פוריה סמי-דסקרטית

1. אם לסדרה $\{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$ יש התמרת פוריה סמי-דסקרטית $F(\omega)$, מצא את ההתמרה של הסדרה $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ כאשר

$$(א) \quad g_n = f_{n+m} \text{ שלם קבוע. } m$$

$$(ב) \quad g_n = \frac{1}{h} (f_{n+1} - f_n)$$

$$(ג) \quad g_n = n h f_n$$

בכל מקרה, יש לציין את התוצאה הדומה להתמרת פוריה הרציפה.

2. (א) הוכח שאם

$$f_n = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$$

אזי

$$(f * f)_n = \begin{cases} 2N + 1 - |n| & |n| \leq 2N \\ 0 & |n| > 2N \end{cases}$$

(ב) מה היא התמרת הפוריה הסמי-דיסקרטית של הסדרה $\{(f * f)_n, n \in \mathbb{Z}\}$?

(ג) העזר בתוצאה של הסעיף הקודם להוכיח ש-

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4 \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) z \right)}{\sin^4 \frac{z}{2}} dz = \frac{2}{3} (2N + 1) (8N^2 + 8N + 3) \pi$$

התמרת פוריה דסקרטית

3. מצא את התמרות הפוריה הדסקרטיות של הסדרות הבאות:
בכל מקרה $-\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq \frac{N}{2}$

$$(א) f_n = 1$$

$$(ב) f_n = \cos(2\pi rn/N) \text{ שלם } r$$

$$(ג) f_n = \cos(\pi n/N)$$

$$(ד)$$

$$f_n = \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ 1 & n > 0 \end{cases}$$

$$(ה)$$

$$f_n = \begin{cases} 1 & -\frac{r}{2} + 1 \leq n \leq \frac{r}{2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$r < N$ שלם זוגי חיובי.

$$(ו) f_n = n$$

$$(ז) f_n = e^{-|n|}$$

4. אם לסדרה $\{f_n, -\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq \frac{N}{2}\}$ יש התמרת פוריה דסקרטית
מצא את ההתמרת הפוריה הדסקרטיות של הסדרה $\{F_m, -\frac{N}{2} + 1 \leq m \leq \frac{N}{2}\}$
כאשר: $\{g_n, -\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq \frac{N}{2}\}$

$$(א) g_n = f_{n+r \bmod N} \text{ שלם קבוע. (כאן הכוונה של } n \bmod N \text{ הוא השלם היחיד } n' \text{ כך ש-} -\frac{N}{2} + 1 \leq n' \leq \frac{N}{2} \text{ ו- } n - n' \text{ הוא כפל של } N.)$$

$$(ב) g_n = f_{n+1 \bmod N} - f_n$$

$$(ג) g_n = \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) f_n$$

5. במקרים $N = 4$ ו- $N = 6$ כתוב במפורש את המטריצה שמופיעה בנוסחת התמרת הפוריה הדסקרטית. יש לכתוב את כל הרכיבים במונחים של $w = e^{-2i\pi/N}$. בדוק

(א) שהמטריצה היא סימטריות (בשני המקרים).

(ב) שעמודות המטריצה הן אורתוגונליות זו לזו.

הוכח את התכונות האלה גם במקרה של N כללי.

בהצלחה!